9. Teória grafov

Definícia. *Obyčajný graf* G je dvojica (V, E), kde V je množina vrcholov grafu G, E množina hrán grafu G je podmnožinou množiny $\binom{V}{2}$.

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{e \mid e \subseteq V, |e| = 2\}.$$

Grafy, ktoré budeme uvažovať budú konečné, t.j. $|V|, |E| < \infty$. Pre $n \in N$ označujeme K_n *úplny* graf na n vrcholoch (t.j. n vrcholov a všetky možné hrany).

Definícia. Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú *izomorfné* $G \cong G'$, ak existuje vzájomne jednoznačné priradenie (izomorfizmus) $f \colon V \to V'$ tak, že platí:

$$\{u, v\} \in E \Longleftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Počet neizomorfných grafov. Na danej n-prvkovej množine V je práve $2^{\binom{n}{2}}$ rôznych grafov, pretože E je podmožina $\binom{V}{2}$. Grafov, ktoré sú neizomorfné je podstatne menej. Napríklad pre $n = 3$ existuje 8 grafov, z toho sú len 4 neizomorfné.

Určiť presne počet neizomorfných grafov je pomerne ťažké, jednoduchou úvahou ale môžeme dostať aspoň dobré odhady: horný $2^{\binom{n}{2}}$ a dolný $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ vyplýva z faktu, koľko maximálne grafov na n prvkovej množine môže byť izomorfných s daným grafom.

Tvrdíme, že táto funkcia nerastie o mnoho pomalšie než $2^{\binom{n}{2}}$. Aby sme sa o tom presvedčili, zlogaritmujme obe funkcie a trochu ich upravme:

$$\begin{aligned}
\log_2 \left[2^{\binom{n}{2}}\right] &= \binom{n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\
\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} &= \binom{n}{2} - \log_2 n! \geq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - n \log_2 n \\
&= \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2 \log_2 n}{n}\right).
\end{aligned}$$

Vidíme, že pre veľké n sa logaritmy oboch funkcií chovajú ako $\frac{n^2}{2}$.

Práve uvedená úvaha je pozoruhodná tým, že sme len ukázali existenciu veľkého množstva neizomorfných grafov, ale žiadne také grafy sme nezostrojili. Zostrojiť (popísať explicitnú konštruckiu) mnoho neizomorfných grafov nie je tak jednoduché.

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Stupeň vrcholu v v grafe G je definovaný:

$$d_G v = |\{e \mid v \in e \in E\}|.$$

(Niekedy budeme dolný index G vynechávať, ak bude z kontextu jasné, v ktorom grafe stupeň definujeme.)

Lema. *V konečnom grafe G s n vrcholmi $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2|E|.$$

Dôkaz. Zrejme každá hrana prispieva k dvom vrcholom.

♠

Dôsledok. *V konečnom obyčajnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párne číslo. Nemôže existovať graf, ktorý by obsahoval jediný vrchol nepárneho stupňa.*

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Súbor $(d_G(v), v \in V)$, sa nazýva *skóre* grafu G.

Dve skóre považujeme za rovnaké, ak jedno môžeme dostať z druhého preusporiadaním čísiel, t.j. skóre nezávisí na zvolenom poradí vrcholov. Je vidieť, že dva izomorfné grafy majú rovnaké skóre. Na druhej strane, grafy s rovnakým skóre ešte nemusia byť nevyhnutne izomorfné.

Veta (V. Havla). *Nech $D = (d_1, \ldots, d_n)$ je postupnosť prirodzených čísel, $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$. Označme D' postupnosť $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$, kde:*

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{pre } i < n - d_n, \\ d_i - 1, & \text{pre } i \ge n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu práve keď D' je skóre grafu.

Dôkaz. $\Leftarrow$ Predpokladajme, že D' je skóre grafu $G' = (V', E')$, kde $V' = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ a $d'_G(v_i) = d'_i$. Zvoľme nový vrchol v_n rôzny od $v_1, \ldots, v_{n-1}$ a definujme nový graf $G = (V, E)$, kde

$$\begin{aligned} V &= V' \cup \{v_n\}, \\ E &= E' \cup \{\{v_i, v_n\}; i \in \{n - d_n, n - d_n + 1, \ldots, n-1\}\}. \end{aligned}$$

Zrejme skóre grafu G je práve D.

$\Rightarrow$ Predpokladajme, že D je skóre nejakého grafu. Uvažujme množinu $\mathcal{G}$ všetkých grafov na množine vrcholov $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so skóre D v ktorých je stupeň každého vrcholu v_i rovný d_i. Predpokladajme, že máme dokázanú nasledujúcu lemičku:

> *Lemička.* V množine $\mathcal{G}$ existuje graf G_0, v ktorom je vrchol v_n spojený práve s poslednými d_n vrcholmi, t.j. $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}$.

Potom je už vec jednoduchá. Zoberieme graf $G' = (\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, E')$, kde $E' = \{e \mid e \in E(G_0); v_n \notin e\}$, ktorý má zrejme skóre D', čím je dôkaz hotový.

♠

Dôkaz lemičky. Ak $d_n = n-1$, t.j. vrchol v_n je spojený so všetkými vrcholmi v_1, $\dots$, v_{n-1}, vyhovuje lemičke ľubovoľný graf z $\mathcal{G}$ a sme hotoví. Ináč, t.j. pokiaľ v_n nie je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, definujme pre každý graf $G \in \mathcal{G}$ číslo $j(G)$, čo bude najväčší index $\{1, 2, \dots, n-1\}$ taký, že $\{v_j, v_n\} \notin E(G)$. Buď G_0 graf, pre ktorý je $j(G)$ najmenšie možné; dokážeme, že $j(G_0) = n - d_n - 1$, z čoho je už zrejmé, že G_0 vyhovuje pomocnému tvrdeniu.

Predpokladajme teda pre spor, že $j = j(G_0) > n - d_n - 1$. Vrchol v_n musí byť spojený s d_n vrcholmi, a z nich najviac $d_n - 1$ môže nasledovať po vrchole v_j. Preto existuje nejaké $i < j$ také, že v_i je spojený s vrcholom v_n. Máme teda $\{v_j, v_n\} \notin E(G_0)$, $\{v_i, v_n\} \in E(G_0)$. Vzhľadom k tomu, že $d_{G_0}(v_i) \leq d_{G_0}(v_j)$, existuje nejaký vrchol v_k, ktorý je spojený hranou s v_j, ale nie s v_i. V takomto prípade uvážime nový graf $G' = (V(G_0), E')$, kde

$$E' = (E(G_0) \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}) \cup \{\{v_j, v_n\}, \{v_i, v_k\}\}.$$

Je zrejmé, že graf G' má tiež skóre D a pritom $j(G') \leq j(G_0) - 1$, čo je spor s voľbou grafu G_0. Tým je lemička dokázaná.

♠

Príklad Ak máme o nejakej postupnosti $(1,1,1,2,2,3,4,5,5)$ rozhodnúť, či je skóre grafu, podľa predchádzajúcej vety táto postupnosť je skóre $\Leftrightarrow$ keď $(1,1,1,1,1,2,3,4)$ je skóre nejakého grafu $\Leftrightarrow$ $(1,1,1,0,0,1,2)$ $\Leftrightarrow$ $(0,0,1,1,1,1,2)$ (preusporiadnie čísel) $\Leftrightarrow$ $(0,0,1,1,0,0)$ $\Leftrightarrow$ $(0,0,0,0,1,1)$ (preusporidanie čísel) $\Leftrightarrow$ $(0,0,0,0,0)$.

O poslednej postupnosti už vieme určite prehlásiť, že je skóre nejakého grafu (izolovaných 5 vrcholov). Iným problémom je konštrukcia grafu so zadaným skóre. Táto sa dá realizovať postupným pridávaním vrcholu a hrán podľa predchádzajúcej vety.

Eulerovské grafy

Definícia. $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Postupnosť $[v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n]$ v grafe G, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq n$ sa nazýva *sled* dĺžky n z v_0 do v_n. Ak $e_i \neq e_j$, pre $i \neq j$, hovoríme o *ťahu*. Ak $v_i \neq v_j$, hovoríme o *ceste*.

Ak $v_0 = v_n$, hovoríme o uzavretom ťahu. Cesta, pre ktorú $v_0 = v_n$ nazývame kružnicou.

Definícia. Graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany a vrcholy grafu G.

Veta 1. *Obyčajný graf $G = (V, E)$ je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a stupeň každého vrcholu v G je párne číslo.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Zrejmé.
$\Leftarrow$ Uvažujme v G ťah $T := [v_0, e_1, \dots, e_m, v_m]$, ktorý má maximálnu dĺžku. Dokážeme, že:
(i) $v_0 = v_m$,

(ii) $\{e_i, i = 1, 2, \dots, m\} = E$.

(i) Ak by $v_0 \neq v_m$, potom ťah môžme určite predĺžiť, lebo stupne vrcholov v_0 a v_m sú párne, ale v ťahu T nepárne.

(ii) Predpokladajme teda, že $v_0 = v_m$. Definujme pomocný graf $G' = (V', E')$, kde V' je množina všetkých vrcholov v ťahu T a E' množina jeho hrán.

Nech najskôr $V' \neq V$. Vďaka súvislosti grafu G existuje hrana tvaru $e = \{v_k, v'\} \in E$, kde $v_k \in V'$ a $v' \notin V'$. V tomto prípade ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k, e, v']$$

má dĺžku $m+1$ a vedie teda k sporu.

Ak $V' = V$ a $E' \neq E$, uvažujme hranu $e \in E \setminus E'$, kde $e = \{v_k, v_l\}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade vedie ťah

$$[v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k, e, v_l]$$

k sporu.

♠

Ak budeme v grafe G hľadať otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany (t.j. bez podmienky skončiť v tom istom vrchole, ako sme začali), potom nasledujúca veta podáva úplnu charakterizáciu:

Veta 2. *V obyčajnom grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky vrcholy a hrany práve vtedy, keď je súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Dôkaz vety 1 dáva aj návod na nejaký algoritmus na kreslenie grafov jedným ťahom. Neformálny popis: Začneme v ľubovoľnom vrchole v a obťahujeme v ľubovoľnom poradí „za sebou idúce hrany". Ak skončíme opäť vo vrchole v a neobtiahli sme ešte všetky hrany, neobtiahnuté hrany tvoria graf s komponentami so všetkými vrcholmi párneho stupňa. Vyberme ľubovoľný komponent, ktorý nech je prilepený k prvému uzavretému ťahu v nejakom vrchole $\tilde{v}$. Prvý ťah teda rozšírime vo vrchole $\tilde{v}$ o nejaký uzavretý ťah. Rekurzívnym opakovaním uvedenej myšlienky nakoniec nakreslíme celý graf jedným ťahom.

Iný **algoritmus na kreslenie grafu jedným ťahom**:
Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf (G rôzny od K_1) s 0 (prípad (i)) alebo 2 (prípad (ii)) vrcholmi nepárneho stupňa, ostatné vrcholy sú párneho stupňa.

Krok 1. V prípade (i) zvoľ $v_0 \in V$ ľubovoľne, v prípade (ii) nech v_0 je ľubovoľný vrchol nepárneho stupňa. Položme $T_0 = v_0$.

Krok 2. Opakuj nasledujúci krok 3 pre $i = 0, 1, 2, \dots$, pokiaľ je to možné. Pokiaľ už krok 3 nie je možné previesť, T je hľadaný ťah.

Krok 3. (Predĺženie ťahu.) Nech $T_i = [v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i]$ je už definovaný ťah. Zvoľ hranu $e_{i+1} \in E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ obsahujúcu vrchol v_i. Pokiaľ je to možné, zvoľ e_{i+1} naviac tak, aby grafy $(V, E \setminus \{e_1, \dots, e_i\})$ a $(V, E \setminus \{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\})$ mali rovnaký počet komponentov súvislosti.

Dôkaz správnosti algoritmu. Nech G je čo do počtu hrán najmenší protipríklad taký, že uvedený algoritmus vráti ťah, ktorý neprechádza všetkými hranami. Zrejme G je rôzne od K_2.

Označme $T = [v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k]$ výsledok uvedeného algoritmu aplikovaného na graf G.

Označme $G' = G \setminus \{e_1\}$. Ak $G \setminus \{e_1\}$ je nesúvislý graf, potom zrejme $d_G(v_0) = 1$ a položme $G' = G \setminus \{v_0\}$. G' je zrejme súvislý graf rôzny od K_1 a môžme naň aplikovať algoritmus na kreslenie jedným ťahom.

V G' sú buď všetky vrcholy párneho stupňa alebo G' obsahuje práve dva vrcholy nepárneho stupňa, z ktorých jeden je v_1.

Ak G' má všetky vrcholy párneho stupňa, potom podľa predpokladov existuje ťah T' v grafe G', ktorý začína a končí vo vrchole v_1 a prechádza všetkými hranami. Potom $[v_0, e_1] \cup T$ tvorí hľadaný ťah v G.

Ak G' má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, potom jeden z nich je v_1 a podľa predpokladov existuje ťah T' v grafe G', ktorý začína vo vrchole v_1 a prechádza všetkými hranami. Potom $[v_0, e_1] \cup T$ tvorí hľadaný ťah v G.

V oboch prípadoch teda v grafe G existuje ťah prechádzajúci všetkými hranami, spor.

♠

Aplikácia: Prechody bludiskom

Úloha na prechod bludiskom znamená prejsť každou chodbou bludiska aspoň raz a skončiť na mieste, kde sme začali. Každému bludisku zodpovedá graf L: na križovatky a konce slepých ulíc dáme vrcholy, dva vrcholy spojíme hranou, ak existuje medzi nimi v labyrinte priama cesta.

Ak každú hranu v grafe L zdvojíme, dostaneme eulerovský graf. Podľa predchádzajúcej teórie (jednoducho zovšeobecnenej aj na grafy s viacnásobnými hranami) existuje v L uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany. T.j. musí existovať prechod bludiskom, pričom po každej hrane prejdeme dvakrát (v rôznych smeroch).

Ak máme k dispozícii plánik bludiska, ľahko bludiskom na základe predchádzajúceho algoritmu pre eulerovské grafy prejdeme. Realita je však horšia. Máme k dispozícii len niť! Pochodujme teda podľa nasledovného algoritmu a ťaháme stále za sebou niť:

Algoritmus ťažkopádny, ale určite správny:

(1) Ak prídeme na križovatku, z ktorej vedie chodba, cez ktorú ešte nie je pretiahnutá niť, pustíme sa ľubovoľnou takou chodbou.

(2) Ak prídeme na križovatku, z ktorej vedú len chodby s pretiahnutou niťou, vrátime sa späť rovnakou cestou, ako sme prišli (to nám umožní niť), až na najbližšiu križovatku, z ktorej vedie chodba bez nite a tam pokračujeme. (Pri návrate samozrejme niť nezmotávame, ale stále ju za sebou rozvíjame.)

(3) Ak sa vrátime na začiatok nite k vchodu a zistíme, že všetkými chodbami, ktoré odtiaľ vychádzajú, je niť už pretiahnutá, znamená to, že sme už prešli celým bludiskom a skončíme.

Tento algoritmus predovšetkým zaručuje, že nás dovedie naspäť k vchodu do bludiska. Bludisko má totiž len konečný počet hrán a tak nemôžeme donekonečna nachádzať hrany, ktorými sme ešte neprešli. Od poslednej takej hrany, na ktorú narazíme, sa potom podľa pravidla (2) už len vraciame naspäť k vchodu, kde sme začali.

Ďalej je zrejmé, že sme prešli všetky hrany bludiska. Keby zostali hrany, ktorými sme neprešli, vzhľadom na súvislosť bludiska by z niektorého vrcholu, ktorým sme prechádzali vychádzala hrana, ktoru sme neprešli. Týmto vrcholom by sme však prechádzali pri spomenutom návrate a porušili by sme tak pravidlo (1), ktorá dáva prednosť takejto hrane.

Všimnime si ešte, že ak prechádzame nejakou hranou druhýkrát, tak sa vraciame a nezanechávame nijaké odbočky, ktoré by sme neprešli. To je bezprostredný dôsledok (1) a (2) a potvrdzuje správnosť pravidla (3).

Skúsme vylepšiť predchádzajúci algoritmus a odstrániť zbytočné návraty. Sú to práve tie, na začiatku ktorých vstupujeme do hrany, ktorú sme už dvakrát prešli. Ak nás vedie niť naspäť do takejto hrany, tak tam nevstúpime, ale prehmatneme na druhú niť, ktorá odtiaľ vychádza a ďalej sa vraciame podľa nej.

Efektívnejší algoritmus na prechod bludiskom:

(1) Z vrcholu, z ktorého vychádza chodba bez nite, ideme takouto chodbou.

(2) Z vrcholu, z ktorého vedú len chodby s pretiahnutou niťou, vrátime sa späť k najbližšiemu vrcholu, z ktorého vychádza chodba bez nite, a tou sa pustíme. Pri návrate vynechávame chodby s dvoma niťami - namiesto prechodu cez ne zmeníme niť, ktorá nás vedie.

(3) Vo vrchole, z ktorého vychádzajú iba chodby s dvoma niťami, skončíme. Je to východ z bludiska, ktorého každou chodbou sme prešli práve dvakrát a to v opačných smeroch.

Niť zabezpečuje v každom vrchole aby sme z neho odišli práve po tej hrane, ktorou sme do neho prvýkrát prišli. Ak sa vyzbrojíme namiesto nite kriedou, môžeme prejsť bludiskom podľa inej verzie predchádzajúceho algoritmu:

Kriedový algoritmus na prechod bludiskom:

Na začiatku každej chodby, ktorou prechádzame, napíšeme na podlahu písmeno Z, a na koniec písmeno K. Ak sa ocitneme na nejakej križovatke prvýkrát (okrem práve napísaného K tam určite nijaké písmená nie sú), dáme práve napísané K do štvorca. Na križovatkách volíme chodbu, ktorou budeme pokračovať, podľa nasledujúcej priority:

1. neoznačenú,
2. označenú K,
3. označenú $\boxed{K}$.

Do chodieb označených Z alebo ZK nevstupujeme. Ak sa ocitneme na križovatke, z ktorej nevedie chodba nijakého z týchto troch typov, sú všetky chodby, ktoré sem ústia, označené ZK, sme pri vchode a prešli sme všetkými chodbami bludiska práve dvakrát, a to v každom smere raz.

Hamiltonovské grafy

Definícia. Graf sa nazýva *hamiltonovský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca všetkými vrcholmi (hamiltonovská).

Názov pochádza od írskeho matematika a fyzika Williama Rovana Hamiltona (1805-1865). Bol autorom hlavolamu úlohou ktorého bolo obísť po hranách vrcholy pravidelného dvanásťstena.

Na prvý pohľad sa hamiltonovské grafy zdajú byť obdobou eulerovských, nie je to však zďaleka pravda. Nie je známa nijaká jednoduchá a postačujúca podmienka na to, aby bol graf hamiltonovský. Rozhodnúť, či graf je hamiltonovský je NP-úplny problém (to znamená treba prešetriť všetky možnosti). Je však známych mnoho postačujúcich podmienok na hamiltonovskosť.

Veta (Dirac, 1952). *Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak graf je hamiltonský.*

Veta (Ore, 1960). *Nech G je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak pre každú dvojicu vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou súčet ich stupňov je aspoň n, tak G je hamiltonovský.*

Dôkaz. Dôkaz od Lajosa Pósa, keď mal asi 15 rokov . . .

Ukážeme, že ak G nie je hamiltonovský, potom existuje dvojica vrcholov $u, v \in V(G)$ nespojených hranou a takých, že $d_G(u) + d_G(v) < n$.

Pridávajme ku grafu G hranu po hrane (ľubovoľne) kým nedostaneme hamiltonovský graf. (To sa nám určite raz podarí, lebo úplny graf je hamiltonovský.) Ak sme naposledy pridali hranu $\{u, v\}$, znovu ju odstránime. Dostaneme tak graf G', v ktorom síce nie je hamiltonovská kružnica, ale je v ňom (hamiltonovská) cesta, ktorá vychádza z vrcholu u, končí vo vrchole v a prechádza všetkými vrcholmi grafu G – každým práve raz. Ak je x ľubovoľný vrchol, ktorý je v grafe G' spojený hranou s vrcholom u, tak vrchol y, ktorý na spomenutej ceste bezprostredne predchádza vrcholu x, nemôže byť v grafe G' spojený hranou s vrcholom v. Potom by totiž v grafe G' bola hamiltonovská kružnica $u \to y \to v \to x \to u$. Ak je teda k stupeň vrcholu u, nemôže byť vrchol v v grafe G' spojený hranou prinajmenšom z k z $n - 1$ ostatných vrcholov, teda stupeň vrcholu v je najviac $n - k - 1$. Súčet stupňov vrcholov u, v v grafe G' je potom najviac $n - 1$. Pritom graf G' vznikol z grafu G pridávaním hrán, takže v grafe G nie je stupeň nijakého vrcholu väčší ako v grafe G'.

♠

Veta (Pósa). *Nech G je graf, $|V| = n$ a predpokladajme, že $n \geq 3$. Ak pre každé prirodzené číslo $k < \frac{n}{2}$ je počet vrcholov, ktorých stupeň neprevyšuje k, menší ako k, tak je graf hamiltonovský.*

Diracova podmienka vylučuje vrcholy menšieho stupňa ako $\frac{n}{2}$ ($n = |V|$), Pósova podmienka také vrcholy pripúšťa s tým, že obmedzuje ich počet. Ak si zoberieme ako graf samostatnú kružnicu s n vrcholmi, takýto graf je zrejme hamiltonovský a pritom nespĺňa žiadnu podmienku.

Pósova veta udáva v istom zmysle najsilnejší možný výsledok. Ak je dané n, $n \geq 4$ a $p \in \mathbb{N}$ ľubovoľné spĺňa nerovnosť $1 \leq p < \frac{n}{2}$, potom graf K_{p+1} spojený s K_{n-p} jedinou hranou je príkladom grafu, ktorý spĺňa podmienky Pósovej vety až na jediný prípad (existuje aspoň p vrcholov stupňa p) a pritom nie je hamiltonovský.

Vo vetách nechýba predpoklad súvislosti grafu, pretože každý hamiltonovský graf je zrejme súvislý.

Iný pohľad na definíciu hamiltonovského grafu: G je hamiltonovský, ak existuje poradie vrcholov $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ také, že $\mathrm{vzd}_G(v_i, v_{i+1}) = 1$ pre $i = 1, \ldots, n$ a $v_{n+1} = v_1$. To vedie k nasledujúcej definícii:

Definícia. Graf G je k-hamiltonovský, ak existuje $k \in \mathbb{N}$ a poradie všetkých vrcholov $v_1, \ldots, v_n$ grafu G spĺňajúce podmienku:

$$\mathrm{vzd}_G(v_i, v_{i+1}) \le k,$$

pre $i = 1, \ldots, n$ a $v_{n+1} = v_1$.

Veta. *Každý súvislý graf je 3-hamiltonovský.*

Dôkaz. Tvrdenie stačí dokázať pre stromy (viď nasledujúcu lemu), lebo ak G je súvislý graf, T jeho kostra, potom zrejme platí, že ak T je 3-hamiltonovský, je aj graf G 3-hamiltonovský.

♠

Lema. *Nech* $T = (V, E)$, $|V| = n$ *je strom,* $\{u, v\} \in E$. *Potom existuje poradie vrcholov* $u = v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} = v$ *spĺňajúce rovnosť* $\mathrm{vzd}_T(v_i, v_{i+1}) \le 3$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dôkaz. Lemu dokážeme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov. Pre $n \le 3$ je lema zrejmá.

Strom $T \setminus \{u, v\}$ sa rozpadne na komponenty súvislosti, označme T_u a T_v jeho komponenty súvislosti (prípadne i jednovrcholové), $u \in T_u$ a $v \in T_v$.

Zvoľme $u' \in V(T_u)$ tak, že $\{u, u'\} \in E$. (Prípadne $u = u'$.) Analogicky zvoľme $v' \in V(T_v)$ tak, že $\{v, v'\} \in E$. (Prípadne $v = v'$.) Na T_u a T_v použijeme indukčný predpoklad a dostaneme usporiadania vrcholov:

$$\begin{array}{ll} u, x_1, \ldots, x_r, u' & \text{pre } T_u \\ v', y_1, \ldots, y_s, v & \text{pre } T_v. \end{array}$$

Potom $u, x_1, \ldots, x_r, u', v', y_1, \ldots, y_s, v$ je poradie vrcholov stromu T, ktoré spĺňa podmienku $\mathrm{vzd}_T(x, y) \le 3$ pre každé dva po sebe idúce členy.

♠

Súvislosť grafu

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Množinu A:

- $A \subseteq V$ nazývame *vrcholovým* rezom grafu G, ak graf $(V \setminus A, \{e \mid e \in E, e \cap A = \emptyset\})$ je nesúvislý.
- $A \subseteq E$ nazývame *hranovým* rezom grafu G, ak graf $(V, E \setminus A)$ je nesúvislý.

Definícia. Minimálna veľkosť hranového rezu sa nazýva *hranová súvislosť* grafu G, označujeme $k_E(G)$. Graf sa nazýva k-hranovo súvislý, ak $k \le k_E(G)$.

Minimálna veľkosť vrcholového rezu sa nazýva *vrcholová súvislosť* grafu G, označujeme $k_V(G)$. Graf sa nazýva k-vrcholovo súvislý, ak $k \le k_V(G)$.

Zrejme $k_V(G) = k_E(G) = 0$ pre nesúvislé grafy. $k_E(G) = k_V(G) = 1$ pre stromy a $k_E(G) = 2$ pre kružnicu. Dodefinujeme $k_E(K_n) = k_V(K_n) = n - 1$.

Veta. *Pre každý graf $G = (V, E)$ platí:*

$$k_V(G) \leq k_E(G) \leq \min_{v \in V} d_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}.$$

Dôkaz.

Prvá nerovnosť: Ak $k_E(G) = 0$, potom zrejme aj $k_V(G) = 0$. Ak $k_E(G) = 1$, potom G obsahuje most $\{u, v\}$ a buď $G \cong K_2$ alebo určite aspoň jeden z grafov $G \setminus u$ alebo $G \setminus v$ je nesúvislý. To znamená, že $k_V(G) = 1$.

Nech teda $k_E(G) > 1$ a $\tilde{E}$ je hranový rez grafu G minimálnej veľkosti. Zvoľme $e_0 \in \tilde{E}$ a pre každú hranu $e \in \tilde{E} \backslash \{e_0\}$ zvoľme vrchol $u_e \in e \backslash e_0$. Ak graf $G_0 = G \backslash \{u_e \mid e \in \tilde{E} \backslash \{e_0\}\}$ je nesúvislý, potom $kv < ke$. V opačnom prípade je e_0 mostom v grafe G_0. Buď teda $G_0 \cong K_2$ (a teda $k_V(G) = k_E(G)$) alebo ak pridáme k množine $\{u_e \mid e \in \tilde{E} \setminus e_0\}$ jeden z vrcholov hrany e_0 dostaneme nesúvislý graf.

Druhá a tretia nerovnosť sú zrejmé.

♠

Veta (Mengerova). *Graf $G = (V, E)$ je vrcholovo k-súvislý práve vtedy, keď medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u, v \in V$ existuje aspoň k vrcholovo disjunktných ciest.*

Platí analógia aj pre hranovú súvislosť.

Lema. *Graf $G = (V, E)$ je vrcholovo 2-súvislý práve vtedy, keď pre každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje kružnica v G, ktorá ich obsahuje.*

Dôkaz. $\Leftarrow$ Vynechaním ľubovoľného vrchola bude ešte vždy existovať aspoň jedna cesta medzi vrcholmi u a v, G je teda 2-súvislý.

$\Rightarrow$ Existenciu spoločnej kružnice pre vrcholy u a v dokážeme indukciou podľa $\mathrm{vzd}_G(u, v)$.

Ak $\mathrm{vzd}_G(u, v) = 1$, to znamená, že $\{u, v\} = e \in E(G)$. Vďaka 2-súvislosti G je $G \setminus e$ tiež súvislý. Preto existuje v grafe $G \setminus e$ cesta z u do v a tá spolu s hranou e tvorí kružnicu obsahujúcu u a v.

Predpokladajme teraz pre nejaké $k \geq 2$, že každá dvojica vrcholov so vzdialenosťou menšou ako k ležia na spoločnej kružnici a uvážme dva vrcholy $u, v \in V$ vo vzdialenosti k. Nech $P = (u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v)$ je cesta najkratšej dĺžky z u do v. Nakoľko $\mathrm{vzd}_G(u, v_{k-1}) = k - 1$, existuje kružnica obsahujúca u a v_{k-1}. Táto kružnica je tvorená dvoma cestami P_1 a P_2 z u do v_{k-1}. Uvážme teraz graf $G \setminus v_{k-1}$. Ten je súvislý, a teda v ňom existuje cesta $\tilde{P}$ z vrcholu u do vrcholu v. Táto cesta teda neobsahuje vrchol v_{k-1}. Uvážme posledný vrchol na ceste $\tilde{P}$ (smerom od vrcholu v) ležiaci na niektorej z ciest P_1, P_2 a označme ho w. Predpokladajme (bunv), že w je vrcholom cesty P_1. Potom hľadaná kružnica obsahujúca vrcholy v a u bude tvorená cestou P_2, úsekom cesty P_1 medzi u a w, a úsekom cesty $\tilde{P}$ medzi w a v.

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre $e \in E$, $e = \{u, v\}$ je definovaná operácia *delenia hrany* nasledovne:

$$G\%e = (V', E'), \text{kde } V' = V \cup \{w\}, w \notin V$$
$$E' = (E \setminus \{e\}) \cup (\{w, v\}, \{u, w\}).$$

Veta (ušatá). *Graf G je 2-súvislý (vrcholovo) práve vtedy, ak G je možné vytvoriť z K_3 postupným vykonávaním operácie delenia a pridania hrany.*

Kreslenie grafu, rovinné grafy

Definícia. *Oblúk o* je podmnožina roviny tvaru $o = \gamma([0, 1]) = \{\gamma(x); x \in [0, 1]\}$, kde $\gamma\colon [0, 1] \to R^2$ je nejaké prosté spojité zobrazenie uzavretého intervalu $[0, 1]$ do roviny. Pritom body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ sa volajú *koncové body* oblúku o.

Nakreslením grafu $G = (V, E)$ rozumieme priradenie, ktoré každému vrcholu v v grafe G priraďuje bod $b(v)$ roviny, a každej hrane $e = \{v, v'\} \in E$ priraďuje oblúk $o(e)$ v rovine s koncovými bodmi $b(v)$ a $b(v')$. Pritom predpokladáme, že zobrazenie b je prosté (rôznym vrcholom zodpovedajú rôzne body), a oblúk $o(e)$ neobsahuje žiadny z bodov zodpovedajúcich množine V okrem koncových bodov $b(v)$ a $b(v')$. Graf spolu s nejakým nakreslením nazývame *topologický* graf.

Nakreslenie grafu $G = (V, E)$ v ktorom oblúky zodpovedajúce rôznym hranám majú spoločné nanajvýš koncové body, sa nazýva rovinné nakreslenie. Graf G je rovinný, ak existuje aspoň jedno jeho rovinné nakreslenie.

Graf je možné nakresliť v rovine bez toho aby sa jeho hrany pretínali, práve vtedy keď ho môžeme nakresliť na guľu bez toho aby sa hrany pretínali. To je zrejmé, keď použijeme stereografickú projekciu: guľu umiestnime v trojrozmernom priestore tak, aby sa dotýkala uvažovanej roviny ρ a označíme o bod gule najvzdialenejší od roviny ρ (tzv. severný pól). Potom stereografická projekcia priraďuje každému bodu $x \neq o$ na povrchu gule bod x' v rovine ρ, kde x' je priesečník priamky ox s rovinou ρ. Toto je bijekcia medzi povrchom gule bez bodu o a rovinou ρ. Ak máme nejaké nakreslenie grafu na G na povrch gule (bez toho aby sa hrany pretínali), pričom bod o neleží na žiadnom z oblúkov nakreslenia (čo môžme bunv predpokladať), potom stereografickou projekciou dostaneme rovinné nakreslenie G. Obrátene, z každého rovinného nakreslenia dostaneme spätnou projekciou nakreslenie na guľu.

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je topologický rovinný graf, t.j. rovinný graf s daným rovinným nakreslením. Uvažujme množinu všetkých bodov roviny, ktoré neležia v žiadnom z oblúkov nakreslenia. Táto množina sa rozpadne na konečný počet súvislých oblastí. Tieto oblasti budeme nazývať *steny* (oblasti) topologického rovinného grafu.

Oblasti sú definované pre dané rovinné nakreslenie. Je ich počet závislý od konkrétneho nakreslenia, alebo od grafu?

Veta (Eulerov vzorec). *Nech $G = (V, E)$ je súvislý rovinný graf a nech s je počet oblastí nejakého rovinného nakreslenia G. Potom platí:*

$$|V| - |E| + s = 2.$$

Špeciálne počet stien nezávisí na spôsobe nakreslenia rovinného grafu.

Dôkaz. Indukciou podľa počtu hrán grafu G. Ak je $E = \emptyset$, potom $|V| = 1$ a $s = 1$, a vzorec platí. Nech $|E| \geq 1$, rozlišujme dve možnosti:

1. Graf G neobsahuje kružnicu, potom G je strom a teda $|V| = |E| + 1$, pričom $s = 1$.
2. Nejaká hrana $e \in E$ je obsiahnutá v kružnici. Graf $G \setminus e$ je potom súvislý a podľa indukčného predpokladu preň platí Eulerov vzorec. Hrana e v nakreslení G susedí s dvoma rôznymi oblasťami S a S', ktoré sa v nakreslení $G \setminus e$ stanú oblasťou jedinou. Takže počet hrán i stien pre G stúpol v porovnaní s $G \setminus e$ o 1.

♠

Dôsledok 1. *Ak G je súvislý rovinný graf, v ktorom všetky oblasti sú ohraničené kružnicou C_n, tak*

$$|E| = \frac{n(|V| - 2)}{n - 2}.$$

Dôkaz. Každá hrana je obsiahnutá v dvoch oblastiach (kružniciach dĺžky n), teda $2|E| = sn \implies s = \frac{2|E|}{n}$. Dosadením do Eulerovho vzťahu a úpravami dostaneme požadovanú rovnosť.

♠

Dôsledok 2. *Ak G je súvislý rovinný graf s aspoň 3 vrcholmi a maximálnym počtom hrán, tak každá oblasť je C_3 a platí:*

$$|E| = 3|V| - 6.$$

Dôkaz. Ak by nejaká oblasť nebola C_3, pridaním hrany sa rovinnosť grafu neporuší a pôvodný graf teda nemal maximálny počet hrán. Počet hrán vyplýva z predchádzajúceho dôsledku.

♠

Dôsledok 3. *Ak G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholmi, potom platí:*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dôsledok 4. *A G je rovinný graf s aspoň 2 vrcholmi, potom G nevyhnutne obsahuje aspoň dva vrcholy stupňa nanajvýš 5.*

Dôkaz. Z predchádzajúceho dôsledku:

$$2|E| \leq 6|V| - 12$$

a zároveň vieme, že $2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v)$.

Ak by všetky vrcholy boli stupňa aspoň 6, dostávame: $6|V| \leq 6|V| - 12$, čo nie je možné. Obdobne, keby existoval iba jeden vrchol stupňa nanajvýš 5, platilo by: $6(|V| - 1) \leq 6|V| - 12$, čo taktiež nie je možné.

♠

Platónske telesá

Antická škola venovala veľkú pozornosť pravidelným geometrickým útvarom, takzvaným *pravidelným mnohostenom*. Pravidelný mnohosten je trojrozmerné konvexné teleso, ohraničené konečným počtom oblastí – zhodných pravidelných mnohouholníkov, ktorých sa v každom vrchole stretáva rovnaký počet. Záujem o ich štúdiom bol podnietený zrejme ich ohraničeným počtom. Už v staroveku sa vedelo, že ich je len päť: pravidelný štvorsten, kocka, pravidelný osemsten, dvanásťsten a dvadsaťsten. Ale prečo?

Prevedieme mnohosten na graf pomocou streografickej projekcie – umiestnime skúmaný mnohosten do vnútra gule tak, aby jej stred ležal v jeho vnútri. Premietneme ho zo stredu na povrch gule a tým dostaneme nejaké nakreslenie rovinného grafu na guľu. O tom už vieme, že je možné ďalej stereografickou projekciou premeniť na rovinné nakreslenie grafu. Steny mnohostenu budú zodpovedať oblastiam grafu.

Pre každý pravidelný mnohosten má vzniknutý topologický rovinný graf zrejme každý vrchol stupeň d ($d \geq 3$) a každá oblasť má na hranici rovnaký počet vrcholov k, $k \geq 3$. Neexistencia ďalších pravidelných mnohostenov vyplýva z nasledujúcej vety:

Veta. *Nech G je topologický rovinný graf, ktorého každý vrchol má stupeň d, $d \geq 3$ a ktorého každá stena má k vrcholov, $k \geq 3$. Potom G je izomorfný s rovinným nakreslením pravidelného štvorstena, kocky, pravidelného osemstena, dvanásťstena alebo dvadsaťstena.*

Dôkaz. Označme n počet vrcholov, m počet hrán a s počet oblastí rovinného grafu $G = (V, E)$. Z vlastností o počte hrán platia vzťahy:

$$dn = 2m,$$
$$ks = 2m$$

Dosadením do Eulerovho vzorca dostávame:

$$2 = n - m + s = \frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k},$$

a odtiaľ po úprave:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Ak $d = 3$, potom máme $\frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m} > 0$, takže $k \in \{3, 4, 5\}$. Podobne pre $k = 3$ dostaneme $d \in \{3, 4, 5\}$. Potom už v oboch prípadoch vieme jednoznačne dopočítať m, n a s.

Teda nastáva jedna z možností:

d	k	n	m	s	
3	3	4	6	4	(pravidelný štvorsten)
3	4	8	12	6	(kocka)
3	5	20	30	12	(pravidelný dvanásťsten)
4	3	6	12	8	(pravidelný osemsten)
5	3	12	30	20	(pravidelný dvadsaťsten)

♠

Charakterizácia rovinných grafov

Veta (Kuratowského). *Graf G je rovinný, práve vtedy keď žiadny jeho podgraf nie je izomorfný s delením grafu $K_{3,3}$ alebo K_5.*

K_5 nie je zrejme rovinný podľa dôsledku 3, pre $K_{3,3}$ to skúste dokázať ako cvičeníčko.

Kreslenie na iné plochy

Graf G môžeme nakresliť i na iných plochách než je rovina, napr. na guľu, anuloid (torus, pneumatika), Möbiov list, Kleinovu fľašu, či guľu „s ušami“.

Grafy môžeme rozlišovať podľa plochy, na ktorú je možné ich nakresliť (samozrejme bez toho, aby sa hrany pretínali). Napríklad nerovinný graf K_5 je možné nakresliť na torus, $K_{3,3}$ na Möbiov list.

Veta. *Každý graf je možné nakresliť na guľu s dostatočným počtom „uší“.*

Definícia. Minimálny počet „uší“, ktoré je treba pridať ku guli tak, aby na vzniknutú plochu bolo možné nakresliť graf G bez toho aby sa hrany pretínali, sa nazýva *rod* grafu.

Podľa spomínanej stereografickej projekcie medzi kreslením na guľu a rovinu sú rovinné grafy práve grafy rodu 0.

Farbenie grafov

Definícia. Obyčajný graf $G = (V, E)$ sa nazýva k-chromatický, ak existuje funkcia $f\colon V \to \{1, 2, \dots, k\}$ taká, že pre každú dvojicu vrcholov u a v takú, že $\{u, v\} \in E$ platí $f(u) \neq f(v)$. Najmenšie prirodzené číslo k také, že graf je k-chromatický, nazývame farebnosťou grafu a označujeme $\chi(G)$.

Chromatické číslo jedna majú len grafy bez hrán, farebnosť úplnych grafov K_n je n, farebnosť stromov (s aspoň jednou hranou), bipartitných grafov a kružníc s párnym počtom vrcholov je 2, farebnosť kružníc s nepárnym počtom vrcholov je 3.

Lemička 1. $\chi(G) = 2 \iff$ *ak G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Ak G obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, potom $\chi(G) > 2$.

$\Leftarrow$ BUNV môžme predpokladať, že G je súvislý. Ak by nebol, urobíme úvahu pre každý komponent súvislosti zvlášť. Zvoľme $u \in V(G)$ ľubovoľný. Definujme:

$$G_0 = \{v \mid v \in V(G), \text{najkratšia cesta z } u \text{ do } v \text{ je párnej dĺžky}\}$$
$$G_1 = \{w \mid w \in V(G), \text{najkratšia cesta z } u \text{ do } w \text{ je nepárnej dĺžky}\}$$

Vrcholy G_0 ofarbíme farbou č.1 a G_1 farbou č. 2. Zrejme $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, $G_0 \cup G_1 = V(G)$, takže definovali sme farbu každého vrcholu grafu G. Ak ľubovoľné vrcholy $\{x, y\} \in E(G)$, potom ak ich najkratšia vzdialenosť od u je rôznej parity, vrcholy zrejme majú rôznu farbu. Ak by ich vzdialenosť bola rovnakej parity, G by obsahoval kružnicu nepárnej dĺžky, čo však nie je možné. Definovaný rozklad vrcholov teda skutočne definuje ofarbenie.

♠

Lemička 2. $\chi(G) \leq \max_{v \in V} d_G(v) + 1$.

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu G.

♠

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. Množina $M \subseteq V$ sa nazýva *nezávislá*, ak pre žiadnu dvojicu vrcholov z množiny M neexistuje v grafe G hrana, t.j. $\binom{M}{2} \cap E = \emptyset$. *Nezávislosť* grafu je veľkosť najväčšej nezávislej množiny, označujeme $\alpha(G)$, t.j.

$$\alpha(G) = \max\{|M|, M \subseteq V, M \text{ nezávislá množina}\}.$$

Definícia. Nech $G = (V, E)$ je obyčajný graf. *Doplnok* grafu G budeme označovať $\overline{G}$ a je definovaný nasledovne:

$$V(\overline{G}) = V(G), \quad e \in E(\overline{G}) \Longleftrightarrow e \notin E(G).$$

Lemička 3. *Pre každý obyčajný graf* $G = (V, E)$ *platí:* $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V|$.

Dôkaz. Pre každé $i \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$ označme $V_i \subseteq V$ takú, že vrcholy množiny V_i sú ofarbené farbou i. Zrejme $\alpha(G) \geq |V_i|$. Sčítaním poslednej nerovnosti pre $i = 1$ až $\chi(G)$ dostávame požadovanú nerovnosť.

♠

Veta (paradox). *Pre každé* $n \in N$, $n > 1$ *existuje graf* G_n *taký, že* $\chi(G_n) \geq n$ *a* $\alpha(G_n) = 2$.

Farebnosť rovinných grafov

Jednou z prirodzených aplikácií farbenia rovinných grafov je napríklad farbenie štátov v mapách.

Ľahko sa dá ukázať, že chromatické číslo každého rovinného grafu je nanajvýš 6 a zjemnením úvah sa dokáže odhad nanajvýš 5.

Jedným z najznámejších problémov v matematike dlhú dobu bol problém štyroch farieb: t.j. či chromatické číslo každého rovinného grafu je nanajvýš 4?

Nevie sa presne, kto vyslovil túto domnienku. V teórii grafov však zohrala významnú rolu. Už v roku 1840 sa problémom zaoberal Möbius, v roku 1850 sa o vyriešenie pokúšal de Morgan. Od tých čias sa vynaložilo veľa energie na vyriešenie tohto jednoducho formulovateľného problému. Prvý dôkaz uverejnil v roku 1879 Kempe, ale už v roku 1890 v ňom Heawood našiel chybu. Riešenie sa našlo až v roku 1976, keď Apple a Hacken dokázali správnosť hypotézy pomocou počítača. Vychádzali z Kempeho neúplneho dôkazu a jeho vylepšením sa zredukuje problém štyroch farieb na zafarbenie 1936 konkrétnych grafov. Túto úlohu už potom vyriešil počítač. Tu sa v histórii pravdepodobne prvýkrát použil počítač pri riešení závažného teoretického problému.

Veta 1. *Ak G je rovinný graf, potom* $\chi(G) \leq 6$.

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov využijúc pritom fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

♠

Definícia. Graf G je *indukovaný podgraf* grafu H, keď $V_G \subseteq V_H$ a G obsahuje všetky hrany ktorých oba konce patria do V_G.

Veta 2. *Ak G je rovinný graf, potom* $\chi(G) \leq 5$.

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu vrcholov využijúc pritom fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol v stupňa nanajvýš 5. Ak stupeň vrchola v je nanajvýš 4, resp. ak pri zafarbení grafu $G \setminus \{v\}$ 5 farbami existujú dvaja susedia v zafarbení rovnakou farbou, sme hotoví.

Ostáva vyšetriť prípad, ak v susedí s piatimi vrcholmi, z ktorých každý je zafarbený inou farbou c_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Označme G_{13} podgraf grafu $G \setminus \{v\}$ indukovaný tými vrcholmi, ktoré majú farbu c_1 a c_3. Podgraf G_{13} zrejme nemusí byť súvislý. Keď v_1 a v_3 patria do rôznych komponentov grafu G_{13}, potom vzájomnou zámenou farieb c_1 a c_3 v tom komponente, do ktorého patrí vrchol v_1, dostaneme znova ofarbenie grafu $G \setminus \{v\}$ piatimi farbami. V tomto novom ofarbení môžme vrchol v zafarbiť farbou c_1.

Ak v_1 a v_3 patria do toho istého komponentu grafu G_{13}, tak existuje v $G \setminus v$ medzi nimi cesta ktorej všetky vrcholy sú zafarbené striedavo c_1 a c_3. Táto cesta spolu s cestou v_1, v, v_3 tvorí v G kružnicu, ktorá vďaka rovinnosti grafu oddeľuje vrchol v_2 od vrcholov v_4 a v_5. Inými slovami: medzi vrcholmi v_2 a v_4 neexistuje cesta, ktorej všetky vrcholy by boli zafarbené len farbami c_2 a c_4. Teda ak G_{24} označíme podgraf indukovanými tými vrcholmi, ktoré majú farbu c_2 a c_4, tak v_2 a v_4 patria do rôznych komponentov grafu G_{24}. V tom komponente, ktorý obsahuje vrchol v_4 vymeňme navzájom zafarbenie vrcholov (tie, ktoré mali farbu c_2 budú mať c_4 a obrátene.) Takto dostaneme nové ofarbenie grafu $G \setminus \{v\}$ piatimi farbami, pričom vrchol v v grafe G môžme zafarbiť farbou c_4.

♠

Veta 3. *Ak G je rovinný graf, potom* $\chi(G) \leq 4$.

Predchádzajúca veta sa dá ešte zosilniť:

Veta 4. *Ak G je rovinný graf bez trojuholníkov, potom* $\chi(G) \leq 3$.

Dôkaz. Obtiažny.

♠

Ramseyho čísla

Vyjdime z hlavolamu: je pravda, že v spoločnosti, kde je aspoň 6 ľudí, existuje buď trojica ľudí, ktorí sa navzájom poznajú alebo trojica ľudí, ktorí sa navzájom nepoznajú? Vytvorme si graf takto: vrcholmi budú osoby, ktoré spojíme hranou ak sa navzájom poznajú. Potom hlavolam možno sformulovať nasledovne: platí pre každý obyčajný graf s počtom vrcholov aspoň 6, že buď graf G obsahuje K_3 alebo $\alpha(G) \geq 3$?

Iná formulácia hlavolamu: ak ofarbíme všetky hrany K_6 dvoma farbami Č a M je potom pravda, že tam bude existovať jednofarebný trojuholník? Ak $v \in K_6$ ľubovoľný, potom z neho vychádzajú buď aspoň 3 červené hrany, alebo aspoň 3 modré hrany s koncovými vrcholmi u_1, u_2, u_3. Ak sú hrany medzi týmito vrcholmi rovnakej farby, máme hľadaný trojuholník. Ak nie, potom vždy existuje medzi nimi hrana $\{u_x, u_y\}$, $(x, y \in \{1, 2, 3\})$ ktorá spolu s hranami $\{v, u_x\}$ a $\{v, u_y\}$ tvorí jednofarebný trojuholník. (Nakresliť!)

Zovšeobecnime si (ako obvykle) predchádzajúci hlavolam:

Existuje vôbec a keď áno tak aké je najmenšie prirodzené číslo k také, že každý obyčajný graf G na k vrcholoch buď obsahuje K_m alebo $\alpha(G) \geq n$? Čísla s takouto vlastnosťou sa volajú Ramseyho čísla a označujú sa $r(m, n)$.

Rekurentný vzťah medzi Ramseyho číslami našli Erdös a Szekeres.

Veta 5. *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m, n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n). \tag{1}$$

Dôkaz. Nech $G = (V, E)$ má $r(m, n-1) + r(m-1, n)$ vrcholov a zvoľme $v \in V$ ľubovoľný. Budeme rozlišovať 2 prípady:

a) $d_G(v) \geq r(m-1, n)$,

b) $d_G(v) < r(m-1, n)$.

V prípade a) označme $v_1, \ldots, v_k$ vrcholy patriace do okolia v a nech G_1 je podgraf indukovaný vrcholmi $v_1, \ldots, v_k$. Pretože $k \geq r(m-1, n)$ buď G_1 obsahuje K_{m-1} alebo $\alpha(G_1) \geq n$ (vyplýva priamo z definície Ramseyových čísel. Ak G_1 obsahuje K_{m-1}, tak pridaním vrcholu v (ktorý susedí so všetkými vrcholmi v G_1) dostaneme K_m; ak $\alpha(G_1) \geq n$, potom zrejme aj $\alpha(G) \geq n$. Teda tvrdenie vety platí.

V prípade b) v doplnku $\overline{G}$ grafu G platí $d_{\overline{G}}(v) \geq r(m-1, n)$. Dôkaz beží analogicky ako v časti a) ak si uvedomíme, že $r(m, n) = r(n, m)$.

♠

Ľahko sa dá ukázať, že pre ľubovoľné prirodzené $m, n \geq 2$ platí $r(m, 2) = m$, $r(2, n) = n$. Z predchádzajúcej vety dostaneme

$$r(3,3) \leq r(3,2) + r(2,3) = 3 + 3 = 6.$$

To znamená, že pre 6-vrcholové grafy už platí, že obsahujú K_3 alebo nezávislú množinu veľkosti 3, čo je odpoveďou na našu hádanku.

Veta 6. *Pre $m, n \geq 2$ platí*

$$r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}. \tag{2}$$

Dôkaz. Dokazovaný vzťah platí akonáhle aspoň jedno z čísel m a n sa rovná dvom. Potom: $r(m, 2) = m \leq \binom{m}{m-1}$, $r(2, n) = n \leq \binom{n}{1}$. Predpokladajme, že (2) platí pre všetky čísla m_1 a n_1, ktorých súčet je menší ako $m + n$ a dokážeme, že potom platí aj pre m a n.

Podľa IP platí

$$r(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}, \quad r(m-1, n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}.$$

Z toho na základe (1) dostávame:

$$r(m,n) \leq r(m-1,n) + r(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}.$$

♠

Uvedený odhad je veľmi nepresný, ale má dôležitý teoretický význam: vieme, že $r(m, n)$ je vždy konečné číslo. Nájsť presné hodnoty Ramseyho čísel je veľmi ťažká úloha a poznáme doteraz len niekoľko málo hodnôt, najväčšie $r(4, 4) = 18$, $r(3, 7) = 23$. Na určenie ďalších hodnôt dnes ešte nestačia počítače.

Literatúra

J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétnej matematiky. Matfyzpress 1996. Praha (odtiaľ prevzatý dôkaz Havlovej vety)

Š. Znám: Kombinatorika a teória grafov. Skriptá MFF UK, 1989.