# 8. Kombinatorické počítanie

## Kombinácie

**Definícia.** Nech $M$ je ľubovoľná $n$ prvková množina. *Kombináciou* množiny $M$ nazveme jej ľubovoľnú podmnožinu. Ak je podmnožina $k$ prvková, hovoríme o $k$-kombinácii, $n$, $k \in \mathbb{N}$.

Nech $C(n,k)$ označuje počet všetkých $k$-kombinácií $n$ prvkovej množiny.

Číslo $C(n,k)$ sa obvykle značí ako kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ (alebo tiež binomický koeficient) a má rozumnú kombinatorickú interpretáciu len pre $n$, $k \in \mathbb{N}$. Neskôr si zovšeobecníme túto definíciu pre širšie obory hodnôt $n$ a $k$.

**Príklad** Ak $M = \{1,2,3,4,5\}$, potom existuje jediná 0-kombinácia a to $\emptyset$, 5 rôznych 1-kombinácií $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, 10 rôznych 2-kombinácií, ...

**Lemma.** *Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$ platí:*
*(i)* $C(n,0) = C(n,n) = 1$, $C(n,1) = n$ *a pre* $k > n$ *platí* $C(n,k) = 0$,
*(ii)* $C(n,k) = C(n,n-k)$ *pre* $0 \le k \le n$.
*(iii)* $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$, *pre* $1 \le k \le n$.

**Dôkaz.** Nech $M$ je ľubovoľná $n$ prvková množina.
(i) Zrejmé z definície.
(ii) Označme $A(k)$, resp. $A(n-k)$ množinu všetkých $k$-kombinácií množiny $M$, resp. $(n-k)$-kombinácií. Definujme zobrazenie $\varphi : A(k) \to A(n-k)$ nasledujúco: ak $X \in A(k)$, potom $\varphi(X) = M \setminus X$. Zrejme $\varphi(X) \in A(n-k)$ a definované zobrazenie je bijekciou. Potom nutne $C(n,k) = C(n,n-k)$.
(iii) Zvoľme $x \in M$ pevne. Potom všetky $k$-kombinácie množiny $M$ môžme rozdeliť do dvoch skupín:

(a) ktoré neobsahujú prvok $x$, tých je $C(n-1,k)$;
(b) ktoré $x$ obsahujú prvok $x$, tých je $C(n-1,k-1)$.
Zrejme teda $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$, pre $1 \le k \le n$.

♠

Faktoriál je definovaný predpisom $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ a kladieme $0! = 1$.

**Veta.** *Pre* $0 \le k \le n$ *platí*

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Dôkaz.** Pre $n = 0$ tvrdenie zrejme platí.

Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $n-1$ a všetky $k$, $0 \le k < n$. Na základe predchádzajúcej lemy a indukčného predpokladu máme:

$$\begin{aligned} C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1) &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

♠

Všimnime si, že z vety vyplýva aj zaujímavý fakt, že $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ je celé číslo pre ľubovoľné prirodzené čísla $n$ a $k$, $1 \le k \le n$.

## Permutácie

**Definícia.** *Permutáciou* množiny $M$ nazývame jej bijekciu na seba. Počet všetkých permutácii množiny $M$ označujeme $P(M)$.

**Príklad** Vymenujme všetky permutácie množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, … . Pri vymenovávaní permutácií je vhodné zvoliť si nejaký systém.

**Veta.** *Počet permutácií $n$ prvkovej množiny je $n!$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Dôkaz.** Zrejme najjednoduchší je dôkaz matematickou indukciu. Pre $n = 1$ vzorec platí. Predpokladajme platnosť pre ľubovoľnú $n$ prvkovú množinu.

Pre $n+1$ prvkovú množinu $M_{n+1}$ zrejme platí $P(M_{n+1}) = (n+1) \cdot P(M_n) = (n+1)!$.

♠

## Variácie

**Definícia.** Permutácie $k$-kombinácií $n$-prvkovej množiny $M$ sa nazývajú *$k$-variácie* množiny $M$. Počet všetkých $k$-variácií $n$-prvkovej množiny označujeme $V(n, k)$, $n$, $k \in \mathbb{N}$.

**Príklad** Vymenujme všetky 2-variácie množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43.

Zrejme každá $k$-kombinácia má $k!$ rôznych $k$-variácií, t.j.

$$V(n,k) = C(n,k)k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

**Príklad** Koľko jedno až štvorciferných čísel možno zostaviť pomocou cifier 0, 1, 2, 3 ak sa v žiadnom z čísel nijaká cifra nemá opakovať.

Keby medzi ciframi nebola 0, hľadaný počet by bol $V(4, 1) + V(4, 2) + V(4, 3) + V(4, 4) = 64$. Počet jedno- až štvorciferných čísel zostavených z uvedených cifier začínajúcich 0 je: $V(3, 0) + V(3, 1) + V(3, 2) + V(3, 3) = 16$, spolu teda $64 - 16 = 48$.

## Variácie a kombinácie s opakovaním

**Definícia.** Usporiadaná $k$-tica prvkov $n$ prvkovej množiny (prvky sa môžu aj opakovať) sa nazýva *$k$-variácia s opakovaním*. Počet $k$-variácií s opakovaním označujeme $V'(n, k)$.

Zrejme v tomto prípade môže byť aj $k > n$.

**Príklad** Nech $M = \{1, 2\}$. Potom existuje jediná 0-variácia a to $\emptyset$, dve 1-variácie 1, 2; štyri 2-variácie 11, 12, 21, 22, …

**Veta.** *Pre $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí: $V'(n,k) = n^k$.*

**Dôkaz.** Urobíme matematickou indukciou vzhľadom na $k$. Pre $k = 0, 1$ je tvrdenie pravdivé. Predpokladajme, že platí $V'(n, k-1) = n^{k-1}$. Zrejme všetky usporiadané $k$-tice možno vytvoriť z $(k-1)$-tíc tak, že ku každej dodáme jeden prvok na koniec, teda
$$V'(n,k) = nV'(n,k-1) = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$
♠

Označme $W(n,k)$ množinu všetkých $k$-variácií s opakovaním z $n$ prvkovej množiny. Na množine $W(n,k)$ definujme reláciu $R$ nasledovne: nech $A, B \in W(n,k)$, potom $ARB$ práve vtedy, keď $k$-tice $A$ a $B$ sa líšia len poradím prvkov.

Napríklad $122, 212, 221 \in W(2,3)$, t.j. $122 \ R \ 212$, kým $122 \ \not R \ 112$.

Ľahko sa možno presvedčiť, že $R$ je ekvivalencia na množine $W(n,k)$, t.j. $R$ indukuje na množine $W(n,k)$ rozklad.

**Definícia.** Triedy rozkladu množiny $W(n,k)$ indukovaného reláciou $R$ nazývame $k$-kombináciami s opakovaním. Počet $k$-kombinácií s opakovaním pre $n$ prvkovú množinu $M$ budeme značiť $C'(n,k)$.

Určenie počtu všetkých $k$-kombinácií s opakovaním je trochu zložitejšie ako vo všetkých predchádzajúcich prípadoch. Nech $x_i$ označuje koľkokrát sa $i$-ty prvok $n$ prvkovej množiny $M$ nachádza v nejakej $k$-kombinácii s opakovaním. Pre takto definované čísla $x_i$ zrejme musí platiť

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k. \tag{8.1}$$

Určiť počet všetkých $k$-kombinácií $n$ prvkovej množiny $M$ s opakovaním znamená vlastne určiť počet všetkých celočíselných nezáporných riešení rovnice (8.1).

Majte spolu $k$ guličiek umiestnených v rade a $n-1$ paličiek (oba druhy predmetov sú nerozlíšiteľné), umiestňujme paličky medzi guličky. Zrejme každému riešeniu rovnice (8.1) prislúcha práve jedno rozmiestnenie paličiek medzi guličky. Paličky umiestňujeme na $(n+k-1)$ miest a vyberáme $(n-1)$ pozícií, čo môžme urobiť $\binom{n+k-1}{n-1}$ spôsobmi. Dokázali sme teda:

**Veta.** *Pre prirodzené čísla $n$, $k$, $k \le n$ platí*
$$C'(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

### Polynomická veta

**Veta.** *Nech $n$ a $k$ sú ľubovoľné prirodzené čísla, $x_1, x_2, \dots, x_k$ ľubovoľné komplexné čísla. Potom platí*
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

*kde súčet sa vzťahuje na všetky prirodzené $k$-tice nezáporných celých čísel $n_1, \dots, n_k$ pre ktoré platí $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.*

**Dôkaz.** Skúmajme výraz

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k)\dots(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{n\text{-krát}}. \tag{8.2}$$

Pri násobení zrejme dostaneme členy tvaru $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, kde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, pretože každý člen je súčinom $n$ čísiel. Skúsme určiť aký bude v (8.2) koeficient pri člene $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$. Aby sme dostali $n_1$-tú mocninu čísla $x_1$, musíme v $n_1$ výrazoch v zátvorkách vybrať prvý člen. To sa dá uskutočniť práve $\binom{n}{n_1}$ spôsobmi.

Aby sme dostali $n_2$-tú mocninu čísla $x_2$, musíme v $n_2$ výrazoch v zátvorkách vybrať druhý člen; tento výber sa dá uskutočniť v zvyšných $(n - n_1)$ zátvorkách a to práve $\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobmi. Celkove teda existuje $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}$ spôsobov na vybratie $n_1$ členov $x_1$ a $n_2$ členov $x_2$.

Postupujme ďalej: tretí člen $x_3$ možno vybrať $n_3$-krát v zvyšných $n - n_1 - n_2$ zátvorkách, t.j. $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ spôsobmi, atď.

Pokračujúc v tejto úvahe dôjdeme k záveru, že koeficient pri člene $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ vo výraze (8.2) sa rovná číslu

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}.$$

Uvedené číslo možno upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} \\
&\qquad = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \\
&\qquad\qquad \dots \\
&\qquad\qquad \frac{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.
\end{aligned}$$

♠

Výraz $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ sa nazýva multinomický koeficient a niekedy sa zapisuje v tvare:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Dá sa nahliadnuť, že dané číslo odpovedá počtu rôznych zoradení $n$ predmetov, pričom máme k dispozícii $n_1$ nerozlíšiteľných predmetov prvého druhu, $n_2$ nerozlíšiteľných predmetov druhého druhu, ..., $n_k$ nerozlíšiteľných predmetov $k$ druhu, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Zrejme každý výraz $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ sa v mocnine objavuje s celočíselným koeficientom a preto z polynomickej vety vyplýva, že

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

je vždy celé číslo, kde $n_1, \dots, n_k$ sú nezáporné celé čísla, pre ktoré platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

**Dôsledok.** *Ak v polynomickej vete položíme $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$, dostávame zaujímavú identitu:*

$$\sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = k^n$$

*kde súčet sa vzťahuje na všetky $k$-tice nezáporných celých čísel $n_1, \dots, n_k$ pre ktoré platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.*

**Dôsledok.** *1. Ak v polynomickej vete položíme $k = 2$, dostaneme tzv. binomickú vetu (preto sa kombinačným číslam hovorí aj binomické koeficienty):*

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{n_1, n_2 \geq 0, n_1 + n_2 = n} \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2},$$

*čo môžme prepísať do tvaru:*

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_1^i x_2^{n-i}.$$

*2. Ak v predchádzajúcom prípade položíme $x_1 = x_2 = 1$, dostávame*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

*čo má veľa kombinatorických interpretácií: napr. počet všetkých podmnožín $n$ prvkovej množiny je $2^n$ alebo, že súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka je práve $2^n$.*

*3. Ak v prípade pre $k = 2$ položíme $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dostávame*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \tag{8.3}$$

*čo má možno interpretovať napr., že párnych podmnožín $n$ prvkovej množiny je práve toľko, koľko nepárnych podmnožín alebo, že alternujúci súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka je práve 0.*

Práve odvodená rovnosť (8.3) je jadrom dôkazu jednej zo základných kombinatorických metód, tzv. princípu zapojenia a vypojenia.

### Princíp zapojenia a vypojenia

**Príklad** Majme danú množinu $X$ o 98 prvkoch. Nech $A$, $B$ a $C$ sú jej podmnožiny a nech platí: $|A| = 72$, $|B| = 48$, $|C| = 20$, $|A \cap B| = 30$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 13$, $|A \cap B \cap C| = 10$. Určte počet prvkov množiny $X$, ktoré nepatria ani do jednej z podmnožín $A$, $B$, $C$.

Riešenie: $98 - (72 + 48 + 20) + (30 + 15 + 13) - 10 = 156 - 150 = 6$.

Princíp inklúzie a exklúzie je vzťah, podľa ktorého je možné riešiť úlohy podobného typu všeobecne.

Majme daných $m$ objektov a $k$ vlastností (označme ich $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_k$), kde $m$ a $k$ sú prirodzené čísla. Označme $M(a_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ počet tých objektov, ktoré majú vlastnosť $a_i$; $M(a_i, a_j)$ počet tých objektov, ktoré majú súčasne vlastnosť $a_i$ aj vlastnosť $a_j$ $(i \neq j)$; $M(a_i a_j a_t)$ počet tých objektov, ktoré majú súčasne tri vlastnosti $a_i$, $a_j$, $a_t$, atď. Konečne, znakom $M(0)$ označme počet tých objektov, ktoré nemajú ani jednu z daných vlastností.

**Veta.** *Pre vyššie opísané symboly platí rovnosť:*

$$\begin{aligned} M(0) = m - \sum_{i=1}^{k} M(a_i) + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} M(a_i a_j) \\ - \sum_{i,j,t=1;i<j<t}^{k} M(a_i, a_j, a_t) + \dots + (-1)^k M(a_1, a_2, \dots, a_k). \end{aligned} \tag{8.4}$$

**Dôkaz.** Objekt, ktorý nemá ani jednu z vlastností $a_i$ prispieva jednotkou k číslu $M(0)$ aj k $m$, ale vo zvyšných sčítancoch vzťahu (8.4) sa nevyskytuje. Ak nejaký objekt má $t$ vlastností, $t \geq 1$, potom prispieva jednotkou k číslu $m$, $t$ jednotkami k sume $\sum M(a_i)$, $\binom{t}{2}$ jednotkami k sume $\sum M(a_i a_j)$, atď. Teda objekt s $t$ vlastnosťami $(t \geq 1)$ prispieva k pravej strane

$$1 - t + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^t \binom{t}{t}$$

jednotkami, ale podľa (8.3) toto číslo sa rovná nule pre každé $t$. Zhrnutie: objekt, ktorý nemá nijakú z vlastností $a_i$ prispieva k obidvom stranám vzťahu (8.4) jednou jednotkou, kým príspevok objektu s aspoň jednou vlastnosťou je k obidvom stranám nulový. Tým je dôkaz ukončený.

♠

Predchádzajúce tvrdenie sa niekedy zvykne formulovať aj v nasledujúcom tvare, ak $A_i$ označuje množinu objektov s vlastnosťou $a_i$, potom

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} M(a_i) - \sum_{i,j=1;i<j}^{k} M(a_i a_j) \\ + \sum_{i,j,t=1;i<j<t}^{k} M(a_i, a_j, a_t) - \dots - (-1)^k M(a_1, a_2, \dots, a_k). \end{aligned} \tag{8.5}$$

**Príklad** (Problém šatnárky) Ctihodní pánovia v počte $n$ prídu na zhromaždenie, všetci v klobúkoch a odložia si svoje klobúky do šatne. Pri odchode roztržitá šatnárka dá každému pánovi náhodne jeden z klobúkov. Aká je pravdepodobnosť, že žiadny pán nedostane od šatnárky späť svoj klobúk?

Tento problém sformulovaný ako hračka je pozoruhodný a svojho času zamestnával matematických géniov tej doby. Najprv ho preformulujme pomocou permutácií. Očíslujme pánov 1, 2, ... , $n$ a ich klobúky tiež. Potom činnosť šatnárky vedie k náhodnej permutácii $\pi$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, kde $\pi(i)$ je číslo klobúku vrátenému $i$-temu pánovi. Otázka znie, s akou pravdepodobnosťou platí $\pi(i) \neq i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nazveme index $i$ spĺňajúci $\pi(i) = i$ pevným bodom permutácie $\pi$. Pýtame sa teda, aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolená permutácia nemá žiadny pevný bod. Ak označíme $s(n)$ počet permutácií bez pevného bodu, bude skúmaná pravdepodobnosť $s(n)/n!$.

Pomocou princípu inklúzie a exklúzie sa dá odvodiť vzorec pre $s(n)$. Budeme hľadať počet „zlých“ permutácií, t.j. permutácií s aspoň jedným pevným bodom. Nech $S(n)$ označuje množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a pre $i = 1, 2, \dots, n$ definujme $A_i = \{\pi \in S_n; \pi(i) = i\}$. Zlé permutácie sú práve zjednotenia všetkých $A_i$.

Aby sme mohli aplikovať princíp inklúzie a exklúzie, musíme vyjadriť veľkosť $l$-násobných prienikov množín $A_i$. Ľahko je vidieť, že $|A_i| = (n-1)!$. Aké permutácie sú napríklad v $A_1 \cap A_2$? Práve tie, ktoré majú 1 a 2 ako pevné body, takých je $(n-2)!$. Všeobecne pre ľubovoľné $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$ máme $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l}| = (n-l)!$ a preto dosadením do princípu inklúzie a exklúzie (referieu) vyjde

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \binom{n}{l} (n-l)! = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \frac{n!}{l!}.$$

Dané číslo udáva počet permutácií s aspoň jedným pevným bodom, počet $s(n)$ je teda rovný

$$s(n) = n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!},$$

čo môžme prepísať na tvar

$$s(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Súčet radu v zátvorke konverguje pre rastúce $n$ k $e^{-1}$, celková pravdepodobnosť preto konverguje k $e^{-1}$.

## Odhady kombinačných čísel a faktoriálu

### Odhad faktoriálu

Zrejme pre každé $n \geq 1$ platí $n! \leq n^n$, ako je vidieť z definície faktoriálu.

Presnejší odhad dokázal Gauss pekným trikom ... Najskôr však potrebujeme nasledujúcu lemu:

**Lema.** *Pre každú dvojicu kladných reálnych čísel a, b, geometrický priemer* $\sqrt{ab}$ *je rovný nanajvýš aritmetickému* $\frac{a+b}{2}$ .

**Dôkaz.** Zrejme $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Po rozpísaní ľavej strany máme: $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, čím dostávame $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

♠

**Veta.** *Pre každé prirodzené číslo $n$, $n \geq 1$ platí*

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n. \tag{8.6}$$

**Dôkaz.** Platí

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1) \\ &= \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i).\end{aligned}$$

Ak v predchádzajúcej leme zvolíme $a = i$, $b = n+1-i$, dostávame:

$$\sqrt{i \cdot (n+1-i)} \leq \frac{i+n+1-i}{2} = \frac{n+1}{2},$$

čiže

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i \cdot (n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Pre dôkaz druhej strany nerovnosti sa dá využiť súčin: $i \cdot (n+1-i)$. Pre $i = 1$ a $i = n$ je rovný $n$ a pre $2 \leq i \leq n-1$ máme súčin dvoch čísel, z ktorých je jedno aspoň $\frac{n}{2}$ a menšie je aspoň 2 a teda súčin je aspoň $n$. Dostávame:

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

a preto $n! \geq \sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}}$, ako sme chceli dokázať.

♠

Presnejší odhad faktoriálu je známy pod menom Stirlingova formula. Ak definujeme funkciu:

$$f(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{8.7}$$

potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n!} = 1.$$

### Odhady binomických koeficientov

Podobne ako sme vyšetrovali chovanie funkcie $n!$, budeme sa teraz zaoberať odhadmi kombinačných čísel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}.$$

Je hneď viedieť, že

$$\binom{n}{k} \leq n^k,$$

a pre mnoho použití s daným odhadom vystačíme.

Aby sme odvodili dolný odhad, pozrieme sa na definíciu binomického koeficientu zapísanú ako súčin zlomkov tak ako v horeuvedenom vzorci. Pre $n \geq k > i \geq 0$ platí $(n-i)/(k-i) \geq n/k$ a preto

$$\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Nasledujúci vylepšený horný odhad je podobného tvaru a na jeho dôkaze predvedieme ešte jednu ďalšiu metódu.

Ľahko sa nahliadne nasledujúci fakt: pre každé reálne číslo $x$ platí

$$1 + x \leq e^x.$$

Označme $f(x) = e^x - 1 - x$, zrejme $f'(x) = e^x - 1$. Funkcia $f(x)$ má minimum v $x = 0$, pretože $f'(0) = 0$ a $f'(x) < 0$ pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ (t.j. $f$ je klesajúca) a $f'(x) > 0$ pre $x \in \langle 0, \infty)$ (t.j. $f$ je rastúca).

Pretože $f(0) = 0$ a v 0 má funkcia minimum, zrejme $f(x) \geq 0$.

**Veta.** *Pre každé prirodzené číslo $n$ a $k$, $1 \leq k \leq n$, platí*

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

**Dôkaz.** Dokážeme v skutočnosti silnejšiu nerovnosť:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Vyjdeme z binomickej vety, ktorá hovorí o platnosti

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

Predpokladajme teraz, že $0 < x \leq 1$. Potom vynechaním niektorých sčítancov na ľavej strane dostaneme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k \leq (1+x)^n$$

a vydelením obidvoch strán číslom $x^k$ máme

$$\frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k-1}}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Každé z kombinačných čísel na ľavej strane je vynásobené číslom väčším alebo rovným jednej (lebo sme predpokladali $x \leq 1$); a ak vynecháme tieto koeficienty, ľavú stranu nezväčšíme. Vyjde

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Číslo $x$ z intervalu $(0, 1\rangle$ môžeme zvoliť podľa potreby a urobíme to tak, aby bola pravá strana čo najmenšia. Vhodná hodnota je $x = \frac{k}{n}$. Dosadením tohoto výrazu do pravej strany máme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Konečne s využitím známeho faktu vychádza

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq (e^{\frac{k}{n}})^n = e^k,$$

a z toho už máme tvrdenie vety.

♠

Z definície kombinačného čísla ľahko vyplýva nasledujúci vzorec:

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Preto pre $k \leq \frac{n}{2}$ máme $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ a naopak pre $k \geq \frac{n}{2}$ dostaneme symetricky $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$. Teda pre dané $n$ sú medzi kombinačnými číslami $\binom{n}{k}$ najväčšie tie prostredné: pre $n$ párne je $\binom{n}{n/2}$ väčšie než všetky ostatné, pre $n$ nepárne sú dve najväčšie kombinačné čísla $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ a $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

Chovanie kombinačných čísel $\binom{n}{k}$ pre dané veľké $n$ a pre premenné $k$ blízke $n/2$ pripomína „veľhada, ktorý zožral slona z rozprávky o malom princovi“. Výška tejto krivky je práve $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ a šírka zvonovitého tvaru je približne $2\sqrt{n}$.

Aké veľké je kombinačné číslo $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$? Jednoduchý, ale často dostatočne presný odhad je

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n.$$

Druhá nerovnosť je zrejmá zo súčtu kombinačných čísel v riadku Pascalovho trojuholníka. Analogicky prvá, $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ je najväčšie medzi $n+1$ kombinačnými číslami, ktorých súčet je $2^n$.

Teraz ukážeme podstatne presnejší odhad:

**Veta.** *Pre každé prirodzené číslo $m$, $m \geq 1$, platí*

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} < \binom{2m}{m} < \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}.$$

**Dôkaz.** Obe nerovnosti dokážeme podobne. Uvažujme číslo

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m}.$$

Pretože

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$

dostávame, že

$$P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Chceme teda ukázať

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} < P < \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Pre horný odhad uvážme súčin

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right),$$

ktorý môžeme ekvivalentne prepísať na tvar:

$$\left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\right)\ldots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2.$$

Pretože hodnota činiteľov v súčine je zrejme $< 1$, dostávame $(2m+1)P^2 < 1$ a teda $P < \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Pre dolný odhad podobne uvážime súčin

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right),$$

ktorý prepíšeme na

$$\left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right)\ldots\left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2(2m)P^2},$$

čo dáva dolný odhad.

♠

Ak aproximujeme $(2m)!$ a $m!$ pomocou Stirlingovej formule, dostávame ešte lepší výsledok

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Odhady uvedených kombinačných čísel majú zaujímavé súvislosti napr. s teóriu čísel. Jednou z najslávnejších matematických viet je tvrdenie o hustote prvočísel. Ak označíme $\pi(n)$ počet prvočísiel neprevyšujúcich $n$, potom

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Už v minulom storočí dokázal Čebyšev slabšie tvrdenie:

$$\pi(n) = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

ale práve odhadmi kombinačných čísiel. Čebyšev tiež dokázal Bertrandov postulát, že pre každé prirodzené číslo $n$ existuje prvočíslo $p$, ktoré spĺňa: $n < p \leq 2n$. Dnes najjednoduchší dôkaz Bertrandovho postulátu je tiež založený na odhadoch kombinačných čísel.

### Zovšeobecnené kombinačné čísla

Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ má rozumný kombinatorický zmysel, určuje počet rôznych $k$-prvkových podmnožín z $n$ prvkovej množiny ($n \in \mathbb{N}$), t.j. pre $k > n$ platí $\binom{n}{k} = 0$ a ináč

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1}, \; 1 \leq k \leq n.$$

Kombinačné čísla majú význam aj inde ako v kombinatorickej interpretácii, preto je snaha rozšíriť definíciu kombinačných čísel pre čo najširšiu triedu.

Definujme pre $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!} = \dfrac{r \cdot (r-1) \dots (r-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}, & \text{ak } k \geq 0 \\ 0, & \text{ak } k < 0. \end{cases}$$

Pozor na zmeny platnosti všeobecne zaužívaných vlastností kombinačných čísel:

$$\binom{n}{n} = 1 \Leftrightarrow \quad n \geq 0,$$
$$\binom{n}{n} = 0 \Leftrightarrow \quad n < 0.$$

**Príklad** Spočítame si nejaké kombinačné číslo so zápornými hodnotami:

$$\binom{-1}{3} = -1$$

Zovšeobecnené kombinačné čísla môžme zapisovať do rozšíreného Pascalovho trojuholníka, ako je ukázané v tabuľke 1.

| $n \setminus k$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | |
| -2 | 0 | 1 | -2 | 3 | -4 | 5 | -6 | 7 | |
| -3 | 0 | 1 | -3 | 6 | -10 | 15 | -21 | | |
| -4 | 0 | 1 | -4 | 10 | -20 | 35 | | | |
| -5 | 0 | 1 | -5 | 15 | -35 | | | | |

Rozšírený Pascalov trojuholník

### Kombinatorické identity

Sú známe doslova tisícky rôznych vzťahov a identít pre kombinačné čísla, dokonca sú im venované i celé knihy. My sme sa už zoznámili s nejakými základnými (sčítacia identita, symetrická identita, súčet či alternujúci súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka).

**Príklad** *Hexagonálna vlastnosť*. Vyberte si ľubovoľné číslo v rozšírenom Pascalovom trojuholníku a očíslujme po rade jeho 6 susedov, ktoré ležia v smeroch: SV, V, J, JZ, Z, S. Potom platí, že súčin prvého, tretieho a piateho suseda sa rovná súčinu druhého, štvrtého a šiesteho. (Dokážte si to!)

V ďalšom si rozšírime platnosť spomínaných identít aj pre zovšeobecnené kombinačné čísla a pridáme si niektoré ďalšie a to hlavne tie, ktoré majú pekný kombinatorický dôkaz. Začnime s jednou so základných:

### Symetrická identita

Pozor, platí len pre $r \geq 0$, $r, k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}.$$

**Dôkaz.** Pre $k < 0$ je ľavá strana rovná 0 podľa definície. V čitateli pravej strany je súčin $r \cdot (r-1) \dots (r-(r-k)+1)$, ktorý určite obsahuje 0 a teda pravá strana je tiež rovná 0.

Ak je $k > r \geq 0$, potom v čitateli ľavej strany je súčin $r \cdot (r-1) \dots (r-k+1)$, ktorý určite obsahuje 0 a teda ľavá strana je rovná 0. Dolný koeficent kombinačného čísla na pravej strane je záporný a také kombinačné číslo sa rovná 0 podľa definície.

Pre $0 \leq k \leq r$ rovnosť už bola dokazovaná a dá sa ukázať priamo úpravami kombinačných čísel.

♠

### Absorpčná identita

Pre $k \neq 0$, $k, r \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1},$$

čo sa niekedy vyjadruje aj v tvare (s platnosťou aj pre $k = 0$):

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

**Dôkaz.** Pre $k \leq 0$ binomický koeficent na pravej strane je rovný 0, na ľavej strane pre $k < 0$ tiež, pre $k = 0$ máme súčin s nulou.

Pre $k > 0$ úpravami dostávame:

$$\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r \cdot (r-1)^{\underline{k-1}}}{k \cdot (k-1)!} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

♠

**Sčítacia identita**

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}.$$

**Dôkaz.** Pre $k < 0$ podľa definície sú všetky sčítance rovné 0, pre $k = 0$ nerovnosť zrejme platí.

Pre $k > 0$ môžme vykonať nasledujúce úpravy:

$$\frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \frac{(r-1)^{\underline{k}} + k(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!}$$
$$= \frac{(r-1)^{\underline{k-1}} \cdot (r-k+k)}{k!} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}.$$

♠

**Sumácia podľa oboch indexov**

Použijeme predchádzajúce vzťahy na získanie ďalších identít s peknou interpretáciou v rozšírenom Pascalovom trojuholníku.

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ úpravami dostávame:

$$\binom{r+k+1}{k} = \binom{r+k}{k} + \binom{r+k}{k-1}$$
$$= \binom{r+k}{k} + \binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+k-1}{k-2}$$
$$= \binom{r+k}{k} + \binom{r+k-1}{k-1} + \binom{r+k-2}{k-2} + \binom{r+k-2}{k-3}$$
$$= \dots$$

Ak sa pozrieme na posledný binomický koeficient, zrejme bude existovať nejaká hodnota, od ktorej všetky dolné časti binomických koeficientov budú záporné (a teda binomické keoficienty sú rovné 0).

Dostávame teda:

$$\binom{r+k+1}{k} = \sum_{m \le k} \binom{r+m}{m}.$$

**Sumácia podľa horného indexu**

Pre $n, k \ge 0$ úpravami dostávame:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$
$$= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$
$$= \binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$
$$= \dots$$

V takomto prípade nemôžme uvažovať nekonečný súčet ako v predchádzajúcom prípade, lebo členy nebudú nulové, môžme teda sčitovať len pre horný index v binomickom koeficiente nenulový, t.j.

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{0 \le m \le n} \binom{m}{k}.$$

Predchádzajúci vzťah má peknú kombinatorickú interpretáciu: vyberáme $(k+1)$-tice z $(n+1)$ prvkovej množiny prvkov $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ a pýtame sa, koľko $l$-tíc má najväčší prvok $k$ – práve $\binom{m}{k}$, kde $0 \le m \le n$.

Špeciálnymi voľbami hodnôt dostávame súčet pre postupnosť za sebou idúcich prirodzených čísel:

$$\binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}.$$

**Všeobecné pravidlo**

Pre $r, k \in \mathbb{Z}$ platí nasledujúca rovnosť:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-r-1}{k}.$$

**Dôkaz.** Pre $k \ge 0$ platí

$$r^{\underline{k}} = r \cdot (r-1) \cdot \ldots (r-k+1) = (-1)^k \cdot (-r) \cdot (-r+1) \cdot \ldots (-r+k-1)$$
$$= (-1)^k (-r+k-1)^{\underline{k}}$$

♠

Podľa predchádzajúceho vzťahu sme schopní odvodiť čiastočný alternujúci súčet čísel v Pascalovom trojuholníku.

$$\sum_{k \le m} \binom{r}{k} (-1)^k = \sum_{k \le m} \binom{k-r-1}{k} = \binom{-r-1+m+1}{m}$$
$$= \binom{-r+m}{m} = (-1)^m \binom{m+r-m-1}{m} = (-1)^m \binom{r-1}{m}.$$

**Vandermondova konvolúcia**

Nazýva sa po francúzskom matematikovi Alexandrovi Venermondovi (28. 2. 1735–1. 1. 1796), ktorý o nej napísal významný článok.

Pre $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{0 \le k \le n} \binom{n_1}{k} \cdot \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}.$$

Pre $n_1 = n_2 = n$ a využitím symetrickej identity môžme horeuvedený vzťah prepísať na tvar:

$$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Dôkaz.** 1. (kombinatorický) Predpokladajme, že máme $n_1$ chlapcov a $n_2$ dievčat. Potom pravá strana určuje počet možných $n$-tíc. Ľavá strana v súčte to isté: každý člen súčtu totiž udáva počet možných výberov pre $k$ chlapcov a $(n-k)$ dievčat.

♠

**Dôkaz.** 2. (analytický) Platí, že

$$\left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{n_1+n_2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n, \tag{8.8}$$

$a_j = 0$ pre $j < 0$ a $j > n_1$ a rovnako aj $b_j = 0$ pre $j < 0$ a $j > n_2$. V ďalšom využijeme binomickú vetu a skutočnosť, že keď sa dva polynómy rovnajú, musia sa rovnať aj koeficienty pri zodpovedajúcich mocninách neznámej. Rozpíšme po činiteľoch ľavú stranu (8.8). Prvý činiteľ je $(1+x)^{n_1}$ a teda $a_k = \binom{n_1}{k}$, druhý činiteľ je $(1+x)^{n_2}$ a $b_k = \binom{n_2}{k}$. Ľavú stranu upravíme $(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2} = (1+x)^{n_1+n_2}$, čo ešte rozpíšme ako $\sum_{n=0}^{n_1+n_2}\binom{n_1+n_2}{n}x^n$. Do pravej strany (8.8) dosadíme za $a_k$ a $b_{n-k}$ a môžeme porovnať zodpovedajúce koeficienty pri rovnakých mocninách. Dostaneme dokazovanú rovnosť

$$\binom{n_1+n_2}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}.$$

♠