6. Všeobecné metódy na počítanie súm

Teraz si na jednoduchom príklade precvičíme z rôznych strán poznatky, ktoré sme sa naučili. Na niekoľkých nasledujúcich stranách sa pokúsime nájsť explicitné vyjadrenie pre súčet štvorcov prvých n celých čísel, ktorý označíme $\square_n$:

$$\square_n = \sum_{0 \le k \le n} k^2, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{6.1}$$

Ukážeme, že existuje aspoň sedem rôznych spôsobov, ako riešiť tento problém a postupne sa budeme učiť užitočné stratégie na „útočenie proti súčtom“ vo všeobecnosti.

Najprv, ako obyčajne, si všimnime riešenia pre niekoľko malých prípadov:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\square_n$	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	605

Z uvedených príkladov nie je bezprostredne jasné, ako vyzerá explicitný vzťah. Avšak, ak ho nájdeme, môžeme ho podľa týchto hodnôt skontrolovať.

Metóda 0: Nájdi to v tabuľkách

Úloha nájdenia súčtu prvých n štvorcov už pravepodobne bola vyriešená, takže najpríjemnejšie je nájsť riešenie vo vreckovej príručke. Istotne nám dobre poslúži *CRC Standard Mathematical Tables*, ktorá na strane 36 uvádza riešenie našej úlohy:

$$\square_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{6.2}$$

Na presvedčenie, že sme sa nepomýlili, skontrolujeme tento vzťah pre $\square_5 = 5 \cdot 6 \cdot 11/6 = 55$. Okrem iného, strana 72 v týchto tabuľkách poskytuje ďalšie informácie o súčtoch tretích, štvrtých, … až destiatych mocnín.

Je dobré si osvojiť základné zdroje informácií, lebo môžu byť veľmi užitočné a nápomocné. Ale Metóda 0 nie je celkom konzistentná s naším duchom, lebo chceme vedieť, ako môžeme prísť na riešenie sami. Táto vyhľadávacia metóda je ohraničená na problémy, o ktorých sa iní ľudia rozhodli, že sú ťažko riešiteľné. Iné problémy tam nemusia byť. Pozrite encyklopédiu celočíselných postupností:
`http://www.research.att.com/ñjas/sequences`.

Metóda 1: Navrhni riešenie a dokáž ho indukciou.

Snáď nám malý vtáčik povie riešenie problému, alebo prídeme na explicitný vzťah nejakou menej presnou myšlienkou. Potom musíme dokázať, že riešenie je správne.

Napríklad, môžeme si povšimnúť, že hodnoty $\square_n$ majú málo prvočíselných deliteľov … Taktiež môžeme mať podozrenie na ekvivalentú formulu

$$\square_n = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{6.3}$$

ktorá je krajšia a ľahšie zapamätateľná.

Tak sa na to pozrime! Vieme, že $\Box_0 = 0 = 0(0+\frac{1}{2})(0+1)/3$, takže základ indukcie je ľahký. Predpokladajme, že $n > 0$ a (6.3) platí, keď n nahradíme $n-1$. Nakoľko

$$\Box_n = \Box_{n-1} + n^2,$$

dostávame

$$\begin{aligned} 3\Box_n &= (n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)n + 3n^2 \\ &= \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) + 3n^2 \\ &= \left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) \\ &= n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1). \end{aligned}$$

Preto vzťah (6.3) skutočne platí pre všetky $n \geq 0$.

Indukcia má svôj význam, ale je akosi viac obranná metóda, ako progresívna metóda hľadania riešenia, Ale toto ešte nie je to, čo sme v skutočnosti hľadali. Všetky ostatné súčty, ktoré sme doteraz v tejto kapitole vypočítali, boli získané bez indukcie. Preto tiež podobne chceme určiť súčet typu $\Box_n$. Záblesky inšpirácia nie sú nevyhnutné. Mali by sme byť schopní sčitovať súčty aj v menej tvorivých dňoch.

Metóda 2: Perturbácia súčtu

Vráťme sa k metóde perturbácie, ktorá tak dobre fungovala pre geometrický rad. Vyjmeme prvý a posledný člen z $\Box_{n+1}$ a dostaneme rovnosť pre $\Box_n$.

$$\begin{aligned} \Box_n + (n+1)^2 = \sum_{0\le k\le n}(k+1)^2 &= \sum_{0\le k\le n}(k^2+2k+1) \\ &= \sum_{0\le k\le n}k^2 + 2\sum_{0\le k\le n}k + \sum_{0\le k\le n}1 \\ &= \Box_n + 2\sum_{0\le k\le n}k + (n+1). \end{aligned}$$

Hop-la! Členy $\Box_n$ sa navzájom vyrušia. Niekedy, napriek našemu veľkému nadšeniu, perturbačná metóda dáva vzťah typu $\Box_n = \Box_n$.

Na druhej strane, odvodenie nie je úplne zbytočné, poradí nám, ako sčítať súčet prvých n celých čísel a aký je explicitný vzťah pre tento súčet:

$$2\sum_{0\le k\le n}k = (n+1)^2 - (n+1),$$

aj keď sme dúfali, že objavíme súčet štvorcov prvých n celých čísel. Možno, ak by sme začali so súčtom tretích mocnín celých čísel, ktorý môžeme označiť $\blacksquare_n$, dostali by sme výraz pre súčet štvorcov celých čísel? Skúsme to.

$$\begin{aligned} \blacksquare_n + (n+1)^3 = \sum_{0\le k\le n}(k+1)^3 &= \sum_{0\le k\le n}(k^3+3k^2+3k+1) \\ &= \blacksquare_n + 3\Box_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1). \end{aligned}$$

Členy $\blacksquare_n$ sa vykrátia a dostávame vzťah pre $\square_n$ bez spoliehania sa na matematickú indukciu:

$$\begin{aligned} 3\square_n &= (n+1)^3 - 3(n+1)\frac{n}{2} - (n+1) \\ &= (n+1)(n^2+2n+1-\frac{3}{2}n-1) = (n+1)(n+\frac{1}{2})n. \end{aligned}$$

Metóda 3: Zámena súčtu integrálom.

Ľudia, ktorým je miesto diskrétnej matematiky bližšia matematická analýza, sú bližšie $\int$ miesto $\sum$, takže prirodzene hľadajú možnosť ako nahradiť $\sum$ za $\int$. Ukážeme si, že to nie je až taký zlý nápad. Je vhodné vysvetliť vzťah medzi $\sum$ a $\int$, nakoľko sčitovanie a integrovanie sú založené na veľmi podobných myšlienkách.

V matematickej analýze integrál znázorňujeme ako plochu pod krivkou. Túto plochu môžeme aproximovať pokrytím dlhými a tenkými obdĺžnikmi, ktoré sa dotýkajú krivky. Nakoľko $\square_n$ je súčet plôch obdĺžnikov, ktorých rozmery sú 1×1, 1×4, $\ldots$, $1\times n^2$, približne sa rovná ploche pod krivkou $f(x)=x^2$ medzi 0 a n.

Plocha pod krivkou je $\int_0^n x^2 dx = n^3/3$, preto vieme, že $\square_n$ je približne rovné $\frac{1}{3}n^3$.

Jeden spôsob, ako použiť tento vzťah je určiť chybu $E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3$ v aproximácii súčtu integrálom. Nakoľko $\square_n$ spĺňuje rekurentný vzťah $\square_n = \square_{n-1} + n^2$, zistíme, že E_n spĺňuje jednoduchší rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3 = \square_{n-1} + n^2 - \frac{1}{3}n^3 &= E_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3 \\ &= E_{n-1} + n - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Iný spôsob sledovania integrálneho prístupu je nájsť formulu E_n sčitovaním plôch.

$$\square_n - \int_0^n x^2\,dx = \sum_{k=1}^{n}\Big(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2\,dx\Big)$$

(Toto je pre ľudí, ktorí sú zasvätení do matematickej analýzy!!!)

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(k - \frac{1}{3}\Big).$$

Už vieme vyjadriť E_n a potom aj $\square_n$.

Metóda 4: Prevod sumy na rekurenciu (možno i všeobecnejšiu)

Mierne zovšeobecnený rekurentný vzťah, ktorý sme študovali predtým, taktiež postačí na sčítanie členov typu n^2. Riešenie rekurentnej rovnice

$$\begin{aligned} &R_0 = \alpha, \\ (6.4)\qquad &R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \qquad \text{pre } n > 0 \end{aligned}$$

bude všeobecného tvaru

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta; \tag{6.5}$$

a už sme určili $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$, pretože (6.5) je rovnaký ako vzťah predtým, keď $\delta = 0$. Ak teraz položíme $R_n = n^3$, zistíme, že n^3 je riešením pre $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$, $\delta = 3$. Preto vzťah

$$3D(n) - 3C(n) + B(n) = n^3;$$

určuje $D(n)$.

Zaujímali sme sa o súčet $\Box_n$, ktorý sa rovná $\Box_{n-1} + n^2$, preto sme dostali $\Box_n = R_n$, keď sme položili $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a $\delta = 1$ vo vzťahu (6.5). Odtiaľ $\Box_n = D(n)$. Nepotrebujeme algebraické úpravy na výpočet $D(n)$ z $B(n)$ a $C(n)$, pretože už vieme, aký bude výsledok. Ale pochybovači medzi nami by sa mali uistiť úpravou

$$3D(n) = n^3 + 3C(n) - B(n) = n^3 + 3\frac{(n+1)n}{2} - n = n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1).$$

Metóda 5: Rozvíjaj, upravuj a uvidíš.

Iný spôsob určenia explicitného výrazu pre $\Box_n$ je nahradenie pôvodného súčtu zdanlivo komplikovanejším dvojitým súčtom, ktorý v skutočnosti môže byť zjednodušený

$$\begin{aligned}\Box_n = \sum_{1\le k\le n} k^2 &= \sum_{1\le j\le k\le n} k \\ &= \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le k\le n} k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n}\bigl(n(n+1) + j - j^2\bigr)\end{aligned}$$

Posledný krok je podobný perturbačnej metóde, pretože dostávame rovnicu s neznámou veličinou na oboch stranách.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}\Box_n \\ &= \frac{1}{2}n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) - \frac{1}{2}\Box_n.\end{aligned}$$

Prechod od jednoduchého súčtu k viacnásobnému sa môže zdať na začiatku ako krok späť, ale v skutočnosti je to pokrok pretože dostávame súčty, s ktorými sa ľahšie pracuje. Nemôžeme očakávať, že pri riešení každého problému budeme neustále zjednodušovať a zjednodušovať: nedosiahneme najvyšší vrchol len lezením hore!

Metóda 6: Použi konečný kalkulus.

Metóda 7: Použi vytvárajúce funkcie.

7. Konečný a nekonečný kalkulus

Naučili sme sa narábať so súčtami mnohými spôsobmi. Teraz je načase získať širší pohľad pozerajúc sa na problém sumácie z vyššej úrovne. Matematici objavili „konečný kalkulus“ ako analógiu nekonečnému kalkulu, pomocou ktorého je možné pristupovať k sčitovaniu systematicky.

Nekonečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *derivácie* D, ktorý je definovaný

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Konečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *diferencie* Δ, ktorý je definovaný

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{7.1}$$

Toto je konečná varianta derivácie, v ktorej sme sa ohraničili na kladné celočíselné hodnoty h. Preto, $h = 1$ je najbližšie kladné celé číslo k 0 v zmysle „limity“ keď $h \to 0$ a $\Delta f(x)$ je hodnotou výrazu $\Delta f(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ pre $h = 1$.

Symboly D a Δ sa nazývajú operátory, pretože zobrazujú funkcie do funkcií. Sú to vlastne funkcie funkcií, ktorých výsledky sú funkcie. Ak f je dostatočne hladká funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel, potom Df je tiež funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel. Ak f je ľubovoľná reálna funkcia, je ňou aj Δf. Hodnoty funkcií Df a Δf v bode x sú definované vyššie.

Kedysi sme sa v analýze učili, ako operátor D pracuje na mocninných funkciách $f(x) = x^m$. V takýchto prípadoch $Df(x) = mx^{m-1}$. Toto môžeme neformálne zapísať tým, že f vynecháme

$$D(x^m) = mx^{m-1}.$$

Bolo by pekné, keby operátor Δ dával rovnako pekné výsledky. Pravdaže, čo čert nechcel, nie je to tak. Pozrime sa na príklad

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Ale existuje typ „m-tej mocniny“, ktorá sa operátorom Δ transformuje krajšie a to je to, čo robí konečný kalkulus zaujímavým. Táto nová m-tá mocnina je definovaná nasledujúcim pravidlom

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \ge 0. \tag{7.2}$$

Všimnime si, že malý podčiarovník pod m, ktorý znamená, že násobíme m členov, ktoré sa postupne zmenšujú. Existuje tiež zodpovedajúce označenie pre súčin členov, ktoré rastú:

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \ge 0. \tag{7.3}$$

Ak $m = 0$, definujeme $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, pretože prázdny súčin sa obyčajne definuje 1 (rovnako ako sa prázdny súčet definuje 0).

Veličina $x^{\underline{m}}$ sa nazýva „x na klesajúce m“ a podobne $x^{\overline{m}}$ čítame „x na rastúce m“. Tieto funkcie sa nazývajú *klesajúca* a *rastúca faktorialová mocnina*, pretože majú blízky vzťah k funkcii faktoriál $n! = n(n-1)\dots 1$. V skutočnosti $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

V matematickej literatúre sa objavujú niektoré iné označenia pre faktoriálové mocniny, napríklad „Pochhammerov symbol“ $(x)_m$ pre $x^{\overline{m}}$, alebo $x^{\underline{m}}$; resp. označenie $x^{(m)}$ a $x_{(m)}$ pre $x^{\underline{m}}$. Ale označenie s podčiarovníkom a nadčiarovníkom je výstižné, lebo sa ľahko zapisuje, pamätá a neobsahuje zbytočné zátvorky.

Klesajúce mocnina $x^{\underline{m}}$ je zvlášť pekná z pohľadu Δ. Platí, že

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= ((x+1)^{\underline{m}}) - x^{\underline{m}}\\ &= (x+1)x\dots(x-m+2) - x\dots(x-m+2)(x-m+1)\\ &= mx(x-1)\dots(x-m+2),\end{aligned}$$

a preto konečný kalkulus má šikovný zákon podobný zákonu $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}. \tag{7.4}$$

Toto je základný poznatok.

Operátor D v nekonečnom kalkule má inverzný oprátor, „anti-derivačný“ (resp. integračný operátor $\int$). Základná teoréma matematickej analýzy dáva do vzťahu D a $\int$:

$$g(x) = Df(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \int g(x)\,dx = f(x) + C.$$

V tomto vzťahu $\int g(x)\,dx$ označuje neurčitý integrál funkcie $g(x)$, čo je trieda funkcií, ktorých derivácia je $g(x)$. Analogicky aj Δ má inverzný operátor, „anti-diferenčný“ (alebo sumačný) operátor $\sum$. Platí tu ďalšia základná teoréma:

$$g(x) = \Delta f(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \sum g(x)\delta x = f(x) + C(x). \tag{7.5}$$

Tu výraz $\sum g(x)\delta x$ nazývame *neurčitým súčtom* a označuje triedu funkcií, ktorých *diferencia* je $g(x)$. (Poznamenajme, že malé δ zodpovedá veľkému Δ tak, ako d zodpovedá D). Konštanta C pre neurčité integrály označuje ľubovoľnú konštantu; výraz C pre neurčité súčty je ľubovoľná funkcia $p(x)$, pre ktorú platí, že $p(x+1) = p(x)$. Napríklad, C môže byť periodická funkcia $a + b\sin 2\pi x$; takéto funkcie predstavujú „konštanty“ pri diferencovaní, práve tak, ako konštanty pri derivovaní. V celočíselných hodnotách x je funkcia C konštantou.

Teraz sme dostatočne pripravený na úder. Nekonečný kalkulus má tiež *určité* integrály: ak $g(x) = Df(x)$, potom

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(x)\,\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Preto konečný kalkulus má určité *sumy.* Ak $g(x) = \Delta f(x)$, potom

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(x)\,\Big|_a^b = f(b) - f(a). \tag{7.6}$$

Táto formula dáva zmysel zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ práve tak, ako predchádzajúca dáva význam zápisu $\int_a^b g(x)\,dx$

Ale, čo v skutočnosti znamená $\sum_a^b g(x)\delta x$? Tento zápis sme definovali na základe analógie a nie nevyhnutnosti a potreby. Chceme, aby sa analógia zachovala aj v budúcnosti. Preto si ľahko môžeme spomenúť na pravidlá konečného kalkulu. Ale zápis bude nepoužiteľný, ak by sme nerozumeli jeho významu. Pokúsme sa vydedukovať jeho význam sledovaním niektorých špeciálnych prípadov. Nech $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Ak $b = a$, platí

$$\sum\nolimits_a^a g(x)\,\delta x = f(a) - f(a) = 0.$$

Ďalej, ak $b = a+1$, výsledok je

$$\sum\nolimits_a^{a+1} g(x)\,\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a).$$

Ešte všeobecnejšie, ak b zväčšíme o 1, platí

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^{b+1} g(x)\,\delta x - \sum\nolimits_a^{b} g(x)\,\delta x &= \bigl(f(b+1) - f(a)\bigr) - \bigl(f(b) - f(a)\bigr)\\ &= f(b+1) - f(b) = g(b).\end{aligned}$$

Tieto výskumy spolu s matematickou indukciou nám dovoľujú dedukovať presný význam zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ vo všeobecnosti, keď a a b sú celé čísla také, že $b \geq a$:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a\leq k<b} g(k), \qquad \text{pre celé čísla } b \geq a. \tag{7.7}$$

Inými slovami, určité súčty sú rovnaké ako obyčajné súčty s ohraničeniami okrem hodnoty sumačného člena v hornej hranici.

Pokúsme sa rekapitulovať trochu iným spôsobom. Predpokladajme, že máme nájsť explicitný výraz pre neznámy súčet, a predpokladajme, že ho môžeme zapísať v tvare $\sum_{a\leq k<b} g(k) = \sum_a^b g(x)\delta x$. Teória konečného kalkulu nám hovorí, že riešenie môžeme vyjadriť ako $f(b) - f(a)$, ak vieme nájsť funkciu f, ktorá je neurčitým súčtom, resp. anti-diferenciou funkcie g. Podľa definície $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Jedným spôsobom, ako porozumieť tomuto princípu je vypísať si členy

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq k<b} \bigl(f(k+1) - f(k)\bigr) &= \bigl(f(a+1) - f(a)\bigr) + \bigl(f(a+2) - f(a+1)\bigr) + \dots\\ &\qquad + \bigl(f(b-1) - f(b-1)\bigr) + \bigl(f(b) - f(b-1)\bigr).\end{aligned}$$

Všetky členy na pravej strane sa vyrušia, okrem $f(b) - f(a)$; takže hodnota súčtu je $f(b)-f(a)$. (Súčty tvaru $\sum_{a\leq k<b}\bigl(f(k+1)-f(k)\bigr)$ sú často nazývané *teleskopické* podľa analógie so zloženým teleskopom, pretože hrúbka zloženého teleskopu je určená len vonkajším polomerom najvonkajšieho tubusu a vnútorného polomeru najvnútornejšieho tubusu).

Ale pravidlo (7.7) možno použiť, len ak $b \geq a$; ale čo ak $b < a$? Podľa vzťahu (7.6)

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^b g(x)\delta x &= f(b) - f(a)\\ &= -\bigl(f(a) - f(b)\bigr) = -\sum\nolimits_b^a g(x)\delta x.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Toto je analógia korešpondujúca rovniciam pre konečný integrál. Podobný argument dokazuje $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$, pre všetky celé čísla a,b a c, čo je sumačná analógia sčitovania integrálov.

Teraz sa niektorí z nás začínajú obávať, čo nám všetky tieto paralely a analógie dali. Dobre, určité súčty nám poskytujú jednoduchú cestu na výpočet klesajúcich mocnín: zo základných zákonov (7.4), (7.6) a (7.7) odvodíme všeobecný zákon

$$\sum_{0 \leq k < n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{pre celé } m, n \geq 0. \tag{7.9}$$

Táto formula je ľahko zapamätateľná, pretože je veľmi podobná formuli

$$\int_0^n x^m \, dx = n^{m+1}/(m+1).$$

Špeciálne, keď $m = 1$, dostávame $k^{\underline{1}} = k$. Princípy konečného kalkulu nám dávajú jednoduchú možnosť na zapamätanie faktu, že

$$\sum_{0 \leq k < n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nový spôsob, ako môžeme sčitovať obyčajné mocniny, sa zakladá na tom, že najprv vyjadríme mocninu pomocou klesajúcich mocnín. Napríklad

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

odkiaľ

$$\sum_{0 \leq k < n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{1}{3}n(n-1)\left(n - 2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}n\left(n - \frac{1}{2}\right)(n-1).$$

Nahradením n výrazom $n+1$ nám dá ešte jeden spôsob ako vypočítať hodnotu nášho starého známeho priateľa $\square_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2$ v explicitnom tvare.

Jeej, to bolo nádherne ľahké. Jednoduché výpočty nám ukážu, že

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

Preto

$$\sum_{a \leq k < b} k^3 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2}\Big|_a^b.$$

Klesajúce mocniny sú veľmi pekné pre súčty. Ale majú nejaké iné oslobodzujúce rysy? Musíme konvertovať naše staré priateľské klasické mocniny na klesajúce mocniny pred sčitovaním, ale musíme ich konvertovať späť skôr než chceme urobiť hocičo iné? Často je možné pracovať priamo s faktoriálovými mocninami, pretože majú dodatočné vlastnosti. Napríklad, práve ako $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ z toho vyplýva $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$ a podobná analógia platí medzi $(x+y)^m$ a $(x+y)^{\underline{m}}$.

Doposiaľ sme uvažovali len mocniny s klesajúcim exponentom, ktoré majú nezáporné exponenty. Na rozšírenie analógii s klasickými mocninami na záporné exponenty, potrebujeme mať vhodnú definíciu $x^{\underline{m}}$ pre $m \le 0$. Všimnime si postupnosť

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2), \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1), \\ x^{\underline{1}} &= x, \\ x^{\underline{0}} &= 1, \end{aligned}$$

a vidíme, že aby sme z výrazu $x^{\underline{3}}$ dostali výraz $x^{\underline{2}}$ a z neho výraz $x^{\underline{1}}$ a z neho $x^{\underline{0}}$ delíme výrazy postupne výrazmi $x-2$, $x-1$ a x. Zdá sa rozumné (ak nie nutné), aby sme v nasledujúcom kroku delili výrazom $x+1$ na transformáciu od výrazu $x^{\underline{0}}$ k výrazu $x^{\underline{-1}}$, a preto $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{(x+1)}$. Prvých pár mocnín s klesajúcimi exponentami má tvar

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1}, \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \end{aligned}$$

a vo všeobecnosti definujeme mocninu s klesajúcim exponentom pre záporný exponent

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}, \qquad \text{pre } m > 0. \tag{7.10}$$

(Je tiež možné definovať mocninu s klesajúcim exponentom pre reálne alebo dokonca aj pre komplexné m, ale to robiť nebudeme.) Takto definované mocniny s klesajúcimi exponentami majú pekné vlastnosti. Snáď najdôležitejšie je všeobecný zákon pre exponenty, analogicky k zákonu

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

pre klasické mocniny. Verzia pre mocniny s klesajúcimi exponentami je

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}, \qquad \text{pre celé čísla } m \text{ a } n. \tag{7.11}$$

Napríklad $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}}$, a pre záporné n dostávame

$$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}} \cdot (x-2)^{\underline{-3}} = x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$$

Ak by sme sa rozhodli definovať $x^{\underline{-1}}$ ako $1/x$ namiesto $1/(x+1)$, zákon pre exponenty (7.11) by zlyhal v prípadoch typu $m = -1$ a $n = 1$. V skutočnosti sme mohli použiť vzťah (7.11) a položiť $m = -n$, aby sme zistili ako majú byť mocniny s klesajúcim exponentom definované v prípade záporných exponentov. Keď existujúce označenie je rozšíriteľné na pokrytie viacerých prípadov, je vždy najlepšie formulovať definíciu tak, aby všeobecné zákony naďalej platili.

Teraz sa ubezpečme, že rozhodujúca vlastnosť diferencie platí aj pre nami novo definované mocniny s klesajúcim exponentom. Platí tiež, že $\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$, keď $m < 0$? Ak napríklad $m = -2$, diferencia je

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= -2x^{\underline{-3}}.\end{aligned}$$

Fajn—funguje to! Podobne aj pre všetky $m < 0$.

Ukázali sme, že sumačná vlastnosť (7.9) platí aj pre záporné mocniny s klesajúcimi exponentami rovnako ako pre kladné exponenty, kým sa neobjaví žiadne delenie nulou:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\,\Big|_a^b \qquad \text{pre celé } m \neq -1.$$

Ale čo v prípade, keď $m = -1$?.

Pripomeňme si, že v integrálnom počte používame

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\,\Big|_a^b$$

keď je $m = -1$. Radi by sme dostali analógiu funkcie $\ln x$. Inými slovami hľadáme funkciu $f(x)$ takú, že

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Nie je ťažké vidieť, že

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$$

je vhodná funkcia, ktorá spĺňa horeuvedenú podmienku. Keď x je celočíselné, táto veličina sa nazýva harmonické číslo H_x. Preto H_x je diskrétna analógia spojitej funkcie $\ln x$. Nie je bez zaujímavosti, že pre celočíselné hodnoty x, hodnota $H_x - \ln x$ je približne $0.577 + 1/(2x)$ pre veľké x. Preto H_x a $\ln x$ nie sú len analogické funkcie, ale ich hodnoty sa vždy odlišujú menej ako 1.)

Teraz uvedieme úplnú definíciu súčtu s mocninami s klesajúcimi exponentami:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\,\big|_a^b, & \text{pre } m \neq -1; \\ H_x\,\big|_a^b, & \text{pre } m = -1. \end{cases} \tag{7.12}$$

Táto formula naznačuje, prečo sa harmonické čísla vyskytujú v riešeniach diskrétnych úloh, napríklad pri analýze triedenia quick-sortu. Rovnako ako tzv. prirodzené logaritmy vznikajú prirodzene v riešeniach spojitých úloh.

Dobre, našli sme analógiu k funkcii $\ln x$. Poďme sa pozrieť, či existuje aj funkcia e^x. Aká funkcia $f(x)$ má vlastnosť $\Delta f(x) = f(x)$, čo zodpovedá identite $De^x = e^x$? To je ľahké:

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) = 2f(x);$$

Budeme sa zaoberať jednoduchým rekurentým vzťahom, pričom funkciu $f(x) = 2^x$ budeme považovať za diskrétnu exponenciálnu funkciu.

Diferencia funkcie c^x je pre ľubovoľné c jednoduchá, konkrétne

$$\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x.$$

Preto anti-diferencia funkcie c^x je funkcia $c^x/(c-1)$, ak $c \neq 1$. Tento poznatok spolu so základnými zákonmi (7.6) a (7.7) nám dávajú peknú možnosť, ako inak porozumieť všeobecnej formule pre súčet geometrického radu:

$$\sum_{a \le k < b} c^k = \sum\nolimits_a^b c^x \,\delta x = \frac{c^x}{c-1}\,\Big|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}, \qquad \text{pre } c \neq 1.$$

Vždy, keď sa stretneme s funkciou f, ktorá by mohla byť ako explicitný výraz, vieme vypočítať jej diferenciu $\Delta f = g$; potom máme funkciu g, ktorej neurčitý súčet $\sum g(x)\delta x$ je známy.

$f = \sum g$	$\Delta f = g$	$f = \sum g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

Napriek všetkým paralelám medzi spojitou a diskrétnou matematikou, niektoré pojmy zo spojitej matematiky nemajú obdobu v diskrétnej matematike. Napríklad, pravidlo derivácie zloženej funkcie v infinitezimálnom počte, ktoré popisuje, ako získať deriváciu funkcie závisiacej na nejakej funkcii. V konečnom kalkule niet žiadnej obdoby tohoto zákona, pretože tu neexistuje žiadny pekný výraz typu $\Delta f(g(x))$. Zámena premennej v diskrétnom kalkule je zložitejšia, snáď okrem prípadu substitúcie výrazu $c \pm x$ za premennú x.

Avšak, $\Delta\big(f(x)g(x)\big)$ *má* celkom pekný tvar, a umožňuje nám *sumáciu po častiach*, ako konečnú variantu toho, čo v infinitezimálnom počte nazývame integrovanie po častiach (per-partes). Pripomeňme si tú formulu

$$D(uv) = uDv + vDu$$

infinitezimálneho počtu, na základe ktorej funguje pravidlo integrovania po častiach

$$\int uDv = uv - \int vDu.$$

Niečo podobné môžeme urobiť v konečnom kalkule.

Začnime použitíme oprátora diferencie na súčin dvoch funkcii $u(x)$ a $v(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta\big(u(x)v(x)\big) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x)\\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1)\\ &\quad + u(x)v(x+1) - u(x)v(x)\\ &= u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x).\end{aligned} \tag{7.13}$$

Túto formulu môžeme prepísať do tradičného tvaru použitím *operátora posunu* E, ktorý je definovaný nasledovne

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Nahradením miesto $v(x+1)$ dostávame kompaktný tvar pravidla pre diferenciu súčinu:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u. \tag{7.14}$$

(Operátor E je vlastne len taká nuansa, ktorá však robí rovnicu korektnou.)

Ak uvažujeme neurčité súčty na oboch stranách rovnice a preusporiadame členy, dostaneme reklamované pravidlo pre sčitovanie po častiach:

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \tag{7.15}$$

Podobne, ako v inifinitezimálnom kalkule, ku všetkým trom členom môžeme pripísať hranice, čím sa stanú neurčité súčty určitými.

Toto pravidlo je užitočné, ak súčet na ľavej strane je ťažšie vypočítateľný ako na pravej strane. Pozrime sa na príklad. Funkcia $\int xe^x\,dx$ je typická funkcia vhodná na integrovanie po častiach; jej diskrétny variant je $\sum x2^x\,\delta x$, s ktorým sme sa v minulosti stretli v tvare $\sum_{k=0}^{n} k2^k$. Na sčítanie po častiach, položíme $u(x) = x$ a $\Delta v(x) = 2^x$, lebo $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ a $Ev(x) = 2^{x+1}$. Dosadením do rovnosti (7.15) dostávame

$$\sum x2^x\,\delta x = x2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x = x2^x - 2^{x+1} + C.$$

Po dosadení hraníc dostávame

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum\nolimits_0^{n+1} x2^x\delta x\\ &= x2^x - 2^{x+1}\,\big|_0^{n+1}\\ &= \big((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\big) - (0\cdot 2^0 - 2^1) = (n-1)2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

Je ľahšie nájsť tento súčet touto metódou ako metódou perturbácie, lebo nemusíme rozmýšľať.

Príklad. Demoštrujme túto metódu na súčte, ktorý vyzerá ešte ťažšie,

$$\sum\nolimits_{0\le k<n} kH_k.$$

Riešenie nie je zložité, ak sa necháme viesť analógiou s integrálom $\int x \ln x\, dx$. Nech $u(x) = H_x$ a $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$, a máme $\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ a platí, že

$$\begin{aligned}\sum xH_x \delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2} H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2} x^{\underline{-1}} \delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2} H_x - \frac{1}{2} \sum x^{\underline{1}} \delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2} H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C.\end{aligned}$$

(V prvkom riadku sme použitím zákona o exponentoch (7.11) zlúčili dve mocniny s klesajúcimi expomentami $(x+1)^{\underline{2}} x^{\underline{-1}}$.) Teraz môžeme dopísať hranice a dostávame, že

$$\sum_{0\le k<n} kH_k = \sum\nolimits_0^n xH_x \delta x \;=\; \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Bigl(H_n - \frac{1}{2}\Bigr).$$

Literatúra

Uvedená kapitola je voľným prekladom časti 2.kapitoly knihy R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.