3. Asymptotické porovnávanie funkcií

Nie vždy vieme nájsť presné riešenie rekurencie alebo súčtu. Keď nie sme schopní nájsť uzavretú formulu, zaujíma nás aspoň jej „odhad“. A aj v prípade, že uzavretú formulu poznáme, môže byť jej odhad zaujímavý, lebo ju nevieme priamo porovnať z inými uzavretými formulami. Budeme sa zaujímať o horný, dolný, resp. stredný odhad.

Nech f, g sú reálne funkcie jednej premennej definované na všetkých prirodzených číslach.

Ak píšeme $f \leq g$ znamená to, že $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in N$. Ale ak uvažujeme funkcie $f(n) = 5n$ a $g(n) = n^2$, potom zrejme neplatí ani $f(n) \leq g(n)$ ani $f(n) \geq g(n)$ pre všetky $n \in N$. V skutočnosti ale g rastie podstatne rýchlejšie ako f, až na niekoľko prvých n hodnôt.

V matematike a v informatike, funkcie definované na prirodzených číslach zvykneme porovnávať podľa ich správania, keď n ide do nekonečna a ako sa správajú pre malé n ignorujeme. Tento prístup je obvykle nazývaný *asymptotická analýza* uvažovaných funkcií. Hovoríme tiež o asymptotickom správaní, alebo asymptotike nejakej funkcie, majúc na mysli jej porovnanie pre nejaké základné funkcie pre $n \to \infty$. Asymptotika pochádza z Gréckeho slova, ktoré znamená „nespojiť sa, nestotožniť sa“. V dnešnom význame asymptotiku chápeme skôr ako „spojiť sa, stotožniť sa“.

V analýze algoritmov sa veľmi často vyskytuje súčet prvých n obrátených hodnôt. Je to tak často, že tieto súčty dostali svoje meno: Harmonické čísla a označujeme ich H_n.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Pre H_n však nepoznáme uzavrený tvar. Je užitočné vedieť aspoň odhad

$$\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1, \text{ pre } n > 1.$$

Niekedy ani to nestačí a šikovnejšie je vedieť, že

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \Theta(n^{-4}).$$

Inou veľmi často sa vyskytujúcou funkciou je faktoriál. V tomto prípade hoci presnú hodnotu $n!$ vieme vypočítať, je šikovnejšie vedieť odhad tzv. Stirlingovu formulu (anglický matematik James Stirling 1692–1770), že

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

A teda, že

$$\log n! = \Theta(n \log n).$$

Hierarchia

Funkcie rôzne rýchlo „asymptoticky rastú“. Formálne to zapíšeme

$$f \prec g \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Toto označenie zaviedol v roku 1871 Paul du Bois-Reymond. Relácia $\prec$ je zrejme tranzitívna: $f(n) \prec g(n)$ a $g(n) \prec h(n)$ potom $f(n) \prec h(n)$. Tiež môžeme písať $g(n) \succ f(n)$, keď $f(n) \prec g(n)$.

Napríklad: $n \prec n^2$, vravíme, že n rastie pomalšie než n^2. Platí, že

$$n^\alpha \prec n^\beta \iff \alpha < \beta \text{ pre } \alpha, \beta \in R.$$

Okrem mocniných funkcií je mnoho iných. Môžeme vybrať niektoré a pomocou relácie $\prec$ ich zoradíme:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^\varepsilon \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}.$$

(ε a c sú ľubovoľné konštanty také, že $0 < \varepsilon < 1 < c$.) Všetky uvedené funkcie, okrem 1, idú do nekonečna, keď n ide do nekonečna. Umiestnením funkcie do hierarchie nehovoríme, že ide do nekonečna, ale ako rýchlo tam ide. Napríklad hierarchia hovorí, že $\log n \prec n^{0.0001}$. Pre $n = 10^{100}$ ale stále prevažuje logaritmus ($\log n = 100$, $n^{0.0001} \approx 1.0233$). Ak však $n = 10^{10^{100}}$, potom $\log n = 10^{100}$, ale $n^{0.0001} = 10^{10^{96}}$.

Ak ε je veľmi malé a k také, že $\varepsilon \geq 10^{-k}$, potom pri voľbe $n = 10^{10^{2k}}$ dostávame $\log n = 10^{2k}$, ale $n^\varepsilon \geq 10^{10^k}$. To znamená, že pomer $(\log n)/n^\varepsilon$ ide k nule, ak $k \to \infty$. Všimnite si, že všetky funkcie, okrem 1, sa s rastúcim n blížia k nekonečnu.

Často sa zaujímame o funkcie, ktoré sa asymptoticky blížia k nule. Analogickú hierarchiu dostaneme, keď použijeme prevrátenú hodnotu

$$f(n) \prec g(n) \iff \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)}, f(n) \text{ a } g(n) \text{ nenulové.}$$

Ďalší užitočný vzťah je

$$1 \prec f(n) \prec g(n) \Longrightarrow e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}.$$

Príklad Pokúsme sa zaradiť do hierarchie funkciu $e^{\sqrt{\log n}}$. Zrejme $\log\log n \prec \sqrt{\log n} \prec \varepsilon \log n$. Využitím predchádzajúceho vzťahu dostaneme $\log n \prec e^{\sqrt{\log n}} \prec e^{\varepsilon \log n} = n^\varepsilon$.

Keď funkcie $f(n)$ a $g(n)$ rastú rovnako rýchlo označujeme to $f(n) \asymp g(n)$. Formálnejšie

$$f(n) \asymp g(n) \Leftrightarrow |f(n)| \leq C|g(n)| \text{ a } |g(n)| \leq C|f(n)|,$$
$$\text{pre nejaké } C \text{ a pre všetky dostatočne veľké } n.$$

Bolo by veľmi príjemné, keby pre ľubovoľné dve funkcie f a g platilo buď $f(n) \prec g(b)$, alebo $f(n) \succ g(b)$, alebo $f(n) \asymp g(b)$. Vo všeobecnosti to však neplatí. Anglický matematik G. H. Hardy zadefinoval triedu *logaritmicko-exponencialnych* funkcií, ktoré túto vlastnosť majú. Je to najmenšia trieda $\mathfrak{L}$ funkcií spĺňajúcich nasledujúce vlastnosti:

- Konštantná funkcia $f(n) = \alpha$ patrí do $\mathfrak{L}$, pre všetky reálne α.
- Identická funkcia $f(n) = n$ patrí do $\mathfrak{L}$.

- Ak patria $f(n)$ a $g(n)$ do $\mathfrak{L}$, patrí tam aj $f(n) - g(n)$.
- Ak $f(n)$ patrí do $\mathfrak{L}$, patrí tam aj $e^{f(n)}$.
- Ak $f(n)$ patrí do $\mathfrak{L}$ a je „eventuálne“ kladná, potom tam patrí aj $\ln f(n)$.

Funkcia je „eventuálne“ kladná, keď existuje celé číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$ je $f(n) > 0$.

Používa sa aj silnejšia relácia než $\asymp$

$$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Vtedy hovoríme, že $f(n)$ je asymptoticky rovnaká ako $g(n)$.

Horný odhad

Pre danú funkciu $g(n)$ označme $O(g(n))$ množinu funkcií:

$$\begin{aligned} O(g(n)) = \{f(n) &: \text{existujú kladné konštanty } c \text{ a } n_0 \text{ také, že} \\ &|f(n)| \le c|g(n)| \text{ pre všetky } n \ge n_0\}. \end{aligned}$$

Hovoríme, že $g(n)$ je **horným odhadom funkcie** $f(n)$, formálne $f(n) = O(g(n))$, ak $f(n) \in O(g(n))$.

Napríklad $10n^2 + 5n = O(n^2)$. Zápisu $f(n) = g(n) + O(n^3)$ sa má rozumieť tak, že funkcia f rastie rovnako rýchlo ako g, až na chybu rádu n^3. Jednoduchý príklad je $\binom{n}{2} = n(n-1)/2 = n^2/2 + O(n)$.

Pozor, aj keď sa v tomto zápise vyskytuje rovnosť, zápis je nesymetrický, pretože je to v svojej podstate nerovnosť, t.j. nie $O(g(n)) = f(n)$.

Označenie zaviedol v roku 1894 Paul Bachman.

Dolný odhad

Pre danú funkciu $g(n)$ označme $\Omega(g(n))$ množinu funkcií:

$$\begin{aligned} \Omega(g(n)) = \{f(n) &: \text{existujú kladné konštanty } c \text{ a } n_0 \text{ také, že} \\ &c|g(n)| \le |f(n)| \text{ pre všetky } n \ge n_0\}. \end{aligned}$$

Hovoríme, že $g(n)$ je **dolným odhadom funkcie** $f(n)$, formálne $f(n) = \Omega(g(n))$, ak $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Stredný odhad

Pre danú funkciu $g(n)$ označme $\Theta(g(n))$ množinu funkcií:

$$\begin{aligned} \Theta(g(n)) = \{f(n) &: \text{existujú kladné konštanty } c_1,\, c_2 \text{ a } n_0 \text{ také, že} \\ &c_1|g(n)| \le |f(n)| \le c_2|g(n)| \text{ pre všetky } n \ge n_0\}. \end{aligned}$$

Hovoríme, že $g(n)$ je **stredným odhadom funkcie** $f(n)$, formálne $f(n) = \Theta(g(n))$, ak $f(n) \in \Theta(g(n))$

Označenie Ω a Θ zaviedol Donald Knuth.

o-ZNAČENIE

Asymptotická horná hranica, ktorá je daná O-značením môže, ale nemusí byť asymptoticky tesná. Hranica $2n^2 = O(n^2)$ je asymptoticky tesná, ale hranica $2n = O(n^2)$ nie je. Zaužívané je značenie o na označenie horných hraníc, ktoré nie sú asymptoticky tesné.

Pre danú funkciu $g(n)$ označme $o(g(n))$ množinu funkcií:

$$\begin{aligned} o(g(n)) = \{f(n) : & \text{ pre ľubovoľnú konštantu } c > 0 \text{ existuje } n_0 > 0 \text{ také, že} \\ & 0 \leq |f(n)| \leq c|g(n)| \text{ pre všetky } n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Inými slovami, funkcia $f(n)$ sa stáva nepodstatne malá vzhľadom ku $g(n)$, ak n ide do nekonečna. Je to vlastne relácia $f(n) \prec g(n)$.

Platí, že $f(n) \asymp g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n) + o(g(n))$.

ω-ZNAČENIE

Analogicky, sa definuje tiež ω značenie k Ω. Pre danú funkciu $g(n)$ označme $\omega(g(n))$ množinu funkcií:

$$\begin{aligned} \omega(g(n)) = \{f(n) : & \text{ pre ľubovoľnú konštantu } c > 0 \text{ existuje } n_0 > 0 \text{ také, že} \\ & 0 \leq c|g(n)| \leq |f(n)| \text{ pre všetky } n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Inými slovami, funkcia $f(n)$ sa stáva podstatne väčšia vzhľadom ku $g(n)$, ak n ide do nekonečna, t.j. $f(n) = \omega(g(n))$ implikuje $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$. Značíme tiež $g \prec f$.

Napríklad: $n^2/2 = \omega(n)$, t.j. $n \prec n^2/2$, ale $n^2/2 \neq \omega(n^2)$.

Základné vlastnosti:

$$\begin{gathered} f(n) = O(f(n)) \\ O(O(f(n))) = O(f(n)) \\ c \cdot O(f(n)) = O(f(n)), c \text{ konštanta} \\ O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|) \\ O(f(n)g(n)) = O(f(n))O(g(n)) \\ O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n)) \end{gathered}$$

4. Asymptotické riešenia rekurentných rovníc

Rekurentné rovnice často vystupujú pri odhade zložitosti algoritmov. Ak nie sme schopný vyriešiť rekurentnú rovnicu, t.j. nájsť uzavretú formulu, zaujíma nás aspoň rýchlosť rastu riešenia danej rekurentnej rovnice.

Motivácia Mergersortu ako príkladu metódy rozdeľuj a panuj

- najskôr rozdelíme postupnosť na 2 podpostupnosti dĺžky ktorých sa líšia najviac o 1
- utriedime rekurentne obe podpostupnosti
- nakoniec utriedime 2 (už utriedené) postupnosti

Pre počet porovnaní platí rekurencia:

$$\begin{aligned} &T(1) = 0, \\ &T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, n > 1. \end{aligned}$$

Nie jednoduchými metódami sa dá ukázať, že $T(n) = n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$. Nás uspokojí aspoň nejaký dobrý odhad.

Metóda „rozdeľuj a panuj“

Všetky algoritmy typu „rozdeľuj a panuj“ majú nasledujúcu schému: Uvažujme problém P veľkosti $n = b^k$, pre $b \in N$, $b > 1$.

(i) dekompozícia problému P veľkosti $n = b^k$ na a podproblémov rovnakého typu veľkosti $\frac{n}{b}$
(ii) riešenie a podproblémov rekurzívne použitím rovnakej metódy
(iii) kombinovanie riešenia P z riešení podproblémov veľkosti $\frac{n}{b}$

Cena dekompozície problémov a kombinovania celkového riešenia (body (i) a (iii) v predchádzajúcom) je opísana funkciou $f(n)$.

Zovšeobecnená rekurencia vyplývajúca z predchádzajúcej metódy „rozdeľuj a panuj“, $a \geq 1$, $b > 1$ konštanty, f funkcia:

$$\begin{aligned} &T(1) = \Theta(1), \\ &T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), n > 1 \end{aligned}$$

Lema 1. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned} &T(1) = \Theta(1), \\ &T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \ \ ak\ n = b^i, i \in N, n > 1 \end{aligned}$$

Potom

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

Dôkaz. Po úpravách

$$\begin{aligned}T(n) &= f(n) + aT\left(\frac{n}{b}\right)\\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right)\\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \cdots + a^{\log_b n-1}f\left(\frac{n}{b^{\log_b n-1}}\right) + a^{\log_b n}T(1).\end{aligned}$$

Pretože $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, posledný výraz je rovný:

$$a^{\log_b n}T(1) = \Theta(n^{\log_b a}).$$

Po dosadení dostávame:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

♠

Hodnota $\Theta(n^{\log_b a})$ zodpovedá cene riešenie podproblémov (suma listov rekurzívneho stromu), hodnota $\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$ zodpovedá cene rozkladu (suma vnútorných vrcholov rekurzívneho stromu).

V niektorých špeciálnych prípadoch funkcie f sa môže stať, že vieme spočítať presne horeuvedenú sumu. V takom prípade nemusíme používať silný aparát vety Master Theorem a môžme dostať výsledok aj prípade, kedy nemôžeme aplikovať Master Theorem.

Poznámka. Ak $f(n)$ je multiplikatívna funkcia, t.j. $f(xy) = f(x)f(y)$, potom môžme predchádzajúci súčet upraviť nasledujúco (predpokladáme $n = b^k$):

$$f(b^{k-j}) = f(b)^{k-j}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(b^{k-j}\right) = f\left(b\right)^k \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{a}{f(b)}\right)^j = f\left(b\right)^k \cdot \frac{\left(\frac{a}{f(b)}\right)^k - 1}{\frac{a}{f(b)} - 1}\\ &= \frac{a^k - f(b)^k}{\frac{a}{f(b)} - 1}\end{aligned}$$

Uvažujme tri prípady:

(a) Ak $a > f(b)$, potom predchádzajúcu sumu je možné odhadnúť

$$\text{cons} \cdot a^k\left(1 - \left(\frac{f(b)}{a}\right)^k\right) \implies T(n) = O(a^k) = O(n^{\log_b a}).$$

(b) Ak $a < f(b)$, potom predchádzajúcu sumu je možné odhadnúť

$$\begin{aligned}&\text{cons} \cdot f(b)^k = \text{cons} \cdot f(b)^{\log_b n} = \text{cons} \cdot n^{\log_b f(b)}\\ &\qquad\implies T(n) = \Theta(a^k) + O(n^{log_b f(b)}) = O(n^{log_b f(b)}).\end{aligned}$$

(c) Ak $a = f(b)$, potom predchádzajúcu sumu je možné upraviť

$$\sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(b^{k-j}\right) = f(b)^k \cdot k = n^{\log_b f(b)} \cdot \log_b n \implies T(n) = \Theta(n^{\log_b f(b)} \cdot \log_b n).$$

Lema 2. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Funkcia $g(n)$ definovaná na mocninách b vzťahom*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

môže byť ohraničená asymptoticky pre mocniny b nasledujúco:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, potom $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky $n \geq b$, potom $g(n) = \Theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, potom $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = O\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon} &= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^\varepsilon}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^\varepsilon)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \left(\frac{b^{\varepsilon \log_b n} - 1}{b^\varepsilon - 1}\right) \\
&= \left(\frac{n^\varepsilon - 1}{b^\varepsilon - 1}\right)
\end{aligned}$$

Pretože b a ε sú konštanty, môžme odhadnúť $n^{\log_b a - \varepsilon} O(n^\varepsilon) = O(n^{\log_b a})$, čím dostávame: $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Za predpokladu $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, dostávame: $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} &= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} 1 \\
&= n^{\log_b a} \log_b n.
\end{aligned}$$

Substitúciou do sumy dostávame:

$$g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n).$$

3. Pretože $f(n)$ sa objavuje v definícii $g(n)$ a všetky členy $g(n)$ sú kladné, dostávame: $g(n) = \Omega(f(n))$ pre mocniny b. Z predpokladu: $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ pre nejaké $c < 1$ a všetky $n \geq b$ máme: $a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \leq c^j f(n)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} g(n) &= a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \\ &\leq f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j \\ &= f(n)\left(\frac{1}{1-c}\right) \\ &= O(f(n)) \end{aligned}$$

Spojením oboch úvah dostávame: $g(n) = \Theta(f(n))$ pre mocniny b.

♠

Lema 3. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ je nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1), \ \textit{ak}\ n = 1, \\ T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \ \textit{ak}\ n = b^i, \ i \in N. \end{aligned}$$

Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \Theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Z lemy 1 a 2 dostávame: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. Z lemy 1 a 2 dostávame: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Podmienka $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ implikuje $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ (dokázať za DÚ), čím z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(f(n)) = \Theta(f(n)).$$

♠

Master Theorem. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ funkcia a nech*

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ interpretujeme ako $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ alebo $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$. Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \Theta(f(n))$.

Dôkaz. Dá sa dokázať na základe výsledkov Lemy 3 a odhadmi na celé časti čísel.

♠

Je dôležité si uvedomiť, že uvedené tri prípady nepokrývajú všetky možnosti pre $f(n)$. Existuje ‚diera' medzi prípadmi 1 a 2, keď $f(n)$ je menšie než $n^{\log_b a}$, ale nie polynomicky menšie. Podobná diera je aj medzi prípadmi 2 a 3, keď $f(n)$ je väčšie než $n^{\log_b a}$, ale nie polynomicky.

Príklad Uvažujme prípad rekurencie $T(n) = 9T(n/3) + n$. Pre túto rekurenciu máme: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$ a teda $n^{\log_b a} = n^2$. Teda $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$, kde $\varepsilon = 1$. Je to prvý prípad Master Theorem a dostávame riešenie $T(n) = \Theta(n^2)$.

Príklad Uvažujme prípad rekurencie $T(n) = T(2n/3) + 1$. Pre túto rekurenciu máme: $a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1$ a teda $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$. Pretože $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$, aplikovaním prípadu 2 dostávame riešenie rekurencie $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.

Príklad Pre rekurenciu $T(n) = 3T(n/4) + n \log_2 n$, máme $a = 3$, $b = 4$, $f(n) = n \log_2 n$ a $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$. Zrejme $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+0.2})$ a stačí teda overiť podmienku regularity z tretieho prípadu. Pre dostatočne veľké n, $af(n/b) = 3(n/4) \log_2(n/4) \leq (3/4)n \log_2 n = cf(n)$ pre $c = 3/4$. Dostávame riešenie $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$.

Príklad Master Theorem ale nemôžeme aplikovať v prípade rekurencie: $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$. Platí $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n \log_2 n$ a $n^{\log_b a} = n$. Vyzerá to na 3 prípad, ale nie je možné nájsť $\varepsilon > 0$ také, aby $n \log_2 n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$, pretože $n \log_2 n$ je asymptoticky (nie polynomicky) väčšie než n. Rekurencia sa dá však napriek tomu spočítať podľa Lemy 1.

Pre spomínaný prípad mergesortu (za predpokladu $f(n) = n - 1$, $a = 2$, $b = 2$) dostávame odhad $\Theta(n \log_2 n)$.

Literatúra

Informácie boli čerpané zo zdrojov: Cormen, Leiserson, Rivest: *Algorithms*, Aho, Hopcroft, Ullman: *Data Structures and Algorithms*, R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science* a Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Invitation to Discrete Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1998.*
Jozef Gruska: Foundation of Computing, International Thomson Press, 1997