2. Metódy riešenia rekurentných rovníc

A. Riešenie lineárnych homogénnych rovníc s konštantnými koeficientami

Príklad na úvod.

V knihe „Liber Abaci“, ktorá sa objavila v roku 1202 uviedol taliansky matematik Leonardo Pisanský, zvaný Fibonacci, túto úlohu:

Pár králikov privádza jedenkrát za mesiac na svet dve mláďatá (samčeka a samičku), ktorí prinášajú ďalšie prírastky už za dva mesiace po svojom narodení. Koľko králikov sa objaví za rok ak predpokladáme, že na začiatku roku bol jeden pár králikov.

Označme F_n symbolom počet králikov po n mesiacoch od začiatku roku. Vidíme, že za $n+1$ mesiacov budeme mať týchto F_n párov a naviac ešte toľko novorodených párov králikov, koľko ich bolo na konci $(n-1)$-ého mesiaca, t.j. F_{n-1}. Dostávame teda rekurentný vzorec:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n > 1 \tag{2.1}$$

Počiatočné podmienky $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Ako ale vyzerá uzavretá formula pre F_n, tzv. n-té Fibonacciho číslo?

Ak $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $\{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ sú riešením (2.1), potom aj súčet, resp. násobok skalárom z R je riešením (2.1). Teda priestor riešení (2.1) je vektorový priestor nad R. Aká je jeho dimenzia? Voľbou prvých dvoch členov máme jednoznačne určenú celú postupnosť, dimenzia je teda 2.

Skúsme hľadať riešenie F_n v tvare r^n pre nejaké $r \in R$. Po prepise (2.1) dostávame

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \qquad n > 1.$$

Prípad $r = 0$ je nezaujímavý, po vydelení r^{n-2} dostávame: $r^2 = r+1$ s koreňmi $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ani jedno s uvedených riešení nesplňa inicializačné podmienky úlohy, podľa úvodných úvah však ľubovoľná lineárna kombinácia koreňov r_1 a r_2 je tiež riešením. Hľadáme teda λ, μ také, že

$$\begin{aligned} \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 &= F_0 = 0, \\ \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 &= F_1 = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Riešením systému (2.2) zistíme, že $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dostávame teda riešenie (2.1) v tvare:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

A ako obvykle, nasleduje skúška správnosti matematickou indukciou.

Zovšeobecnenie predchádzajúceho:

Uvažujme lineárnu homogénnu rovnicu (t.j. s konštantnými koeficientami) v tvare:

(2.3)
$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \text{ pre } n \geq k, \quad \textbf{(induktívna rovnica)}$$
$$u_i = b_i, \text{ pre } 0 \leq i < k, \quad \textbf{(inicializačné podmienky)}$$

Označme $P(r) = r^k - \sum_{j=1}^{k} a_j r^{k-j}$ charakteristický polynóm k-teho rádu induktívnej rovnice a $P(r) = 0$ jej charakteristickú rovnicu. Korene $P(r)$ nazývame charakteristické korene.

Podľa úvodného príkladu ak vieme nájsť všetky korene charakteristickej rovnice, potom vieme nájsť aj uzavretú formu lineárnej rekurencie (2.3).

Podľa základnej vety algebry má charakteristická rovnica k-teho rádu najviac k koreňov v R (nad komplexnými číslami práve k).

Veta. *1. Ak charakteristická rovnica má k rôznych koreňov $r_1, r_2, \ldots, r_k$, potom rekurencia* (2.3) *má riešenie tvaru*

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^n$$

kde λ_i sú riešenia systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^i, \text{ pre } 0 \leq i < k. \tag{2.4}$$

2. Ak charakteristická rovnica má p rôznych koreňov $r_1, \ldots, r_p$, $p < k$ a koreň r_j má násobnosť $m_j \geq 1$, potom

$$r_j^n, nr_j^n, n^2 r_j^n, \ldots, n^{m_j-1} r_j^n$$

sú tiež riešenia induktívnej rovnice a existuje riešenie spĺňajúce inicializačné podmienky v tvare:

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} P_j(n) r_j^n,$$

kde $P_j(n)$ je polynóm stupňa $(m_j - 1)$, ktorého koeficienty môžeme získať ako jednoznačné riešenie systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} P_j(i) r_j^i, \ 0 \leq i < k.$$

Dôkaz: 1. Pretože $u_n = r_j^n$, pre $1 \leq j \leq k$ sú riešeniami induktívnej rovnice, je riešením aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $\sum_{j=1}^{k} a_j r_j^n$. Teda stačí ukázať, že sústava lineárnych rovníc 2.4 má jediné riešenie. Inak povedané keď je determinant matice sústavy nenulový. To je ale dobre známy výsledok z lineárnej algebry, pretože príslušná matica je Vandermondova a jej determinant je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_k^2 \\ \vdots & & & \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le k} (r_j - r_i) \neq 0$$

2. Dôkaz tejto časti je dosť technický, preto ho iba načrtneme. Najprv ukážeme, že ak je r_j koreň charakteristickej rovnice násobnosti $m_j > 1$, sú r_j^n, nr_j^n, $n^2r_j^n$, $\dots$, $n^{m_j-1}r_j^n$ riešenia induktívnej rovnice. Využijeme, že ak je r_j m_j násobným koreňom rovnice $P(r) = 0$, potom je aj koreňom $P^{(j)}(r) = 0$, pre $1 \le j \le m_j - 1$, kde $P^{(j)}(r)$ je j-ta derivácia $P(r)$.

Uvažujme polynóm

$$Q(r) = r(r^{n-k}P(r))' = r[(n-k)r^{n-k-1}P(r) + r^{n-k}P'(r)].$$

Pretože $P(r_j) = P'(r_j) = 0$ platí aj $Q(r_j) = 0$. Ale Q môžeme roznásobiť a dostaneme

$$\begin{aligned} Q(r) = r[r^n - a_1r^{n-1} - \dots - a_kr^{n-k}]' = \\ nr^n - a_1(n-1)r^{n-1} - \dots a_{k-1}(n-k+1)r^{n-k+1} - a_k(n-k)r^{n-k}, \end{aligned}$$

a pretože $Q(r_j) = 0$ platí, že nr_j^n je riešením induktívnej rovnice. Podobne sa indukciou dá dokázať, že všetky $n^sr_j^n, 1 < s < m_j$, využitím postupnosti polynómov $Q_1(r) = Q(r)$, $Q_2(r) = rQ_1'(r), \dots, Q_s(r) = rQ_{s-1}'(r)$.

Ostáva ukázať, že determinant matice sústavy lineárnych rovníc

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} P_j(i)r_j^i,\ 0 \le i < k$$

je nenulový. Jedná sa o zovšeobecnenú Vandermondovu maticu, ktorej determinant je nenulový.

Príklad Riešte rekurentnú rovnicu

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3},\ n \ge 3$$

s inicializačnými podmienkami: $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$.

Koreňmi charakteristickej rovnice $r^3 = 5r^2 - 8r + 4$ sú $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$ násobnosti 2. Riešenie je teda tvaru:

$$u_n = a + 2^n(b + cn),$$

kde a, b, c spĺňajú systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (b + c\cdot 0)\cdot 2^0 \\ -1 &= a + (b + c)\cdot 2 \\ 2 &= a + (b + c\cdot 2)\cdot 2^2. \end{aligned}$$

Riešenie: $u_n = 6 + 2^n(-6 + \frac{5}{2}n)$.

Príklad Riešte rekurentnú rovnicu

$$u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}, \quad n > 1, \qquad u_0 = 0, u_1 = 1.$$

Koreňmi charakteristickej rovnice $r^2 - 2r + 2 = 0$ sú $r_1 = (1 - i)$ a $r_2 = (1 + i)$. Riešenie je tvaru

$$u_n = \lambda(1 - i)^n + \mu(1 + i)^n,$$

kde λ a μ spĺňajú systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda + \mu \\ 1 &= \lambda(1 - i) + \mu(1 + i). \end{aligned}$$

Riešenie: $u_n = \frac{1}{2}\left((1 - i)^n + (1 + i)^n\right)$. Využitím goniometrického zápisu komplexného čísla $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\phi + i\sin\phi)$, kde $\tan\phi = b/a$, dostaneme

$$1 - i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right), 1 + i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Využitím vzťahu na umocňovanie komplexného čísla

$$(a + bi)^n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n\,(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

môžeme riešenie ešte upraviť

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{2}\left((1 - i)^n + (1 + i)^n\right) = \\ \frac{1}{2}i\left(2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right) = \\ 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

Čo je celkom zaujímavé, lebo u_n je celé číslo.

Literatúra

Informácie boli čerpané z kníh: Cormen, Leiserson, Rivest: *Algorithms*, Aho, Hopcroft, Ullman: *Data Structures and Algorithms*, R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Invitation to Discrete Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1998 a Jozef Gruska: Foundations of Computing.*