Kapitola 9: Teória grafov

Stupne vrcholov, skóre grafu:

1. V určitej spoločnosti sa zíde n ľudí. Niektorí sa navzájom poznajú iní, nie. Ukážte, že sa nemôže stať, aby jeden z nich sa poznal len s jediným iným človekom, ale každý iný sa poznal práve s dvoma ľuďmi.
2. Nájdite všetky neizomorfné grafy na 5 vrcholoch také, že stupeň každého vrcholu je 3.
3. Dokážte, že neexistuje obyčajný graf, ktorého stupne vrcholov sú navzájom rôzne čísla.
4. Zostojte graf s 10 vrcholmi a skóre: (4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1), (9, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2).
5. Nakreslite všetky navzájom neizomorfné grafy so skóre $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.
6. Pre každé prirodzené číslo $n > 3$ nájdite príklad postupnosti dĺžky n s nasledujúcimi vlastnosťami: každý člen postupnosti je niektoré z čísel $1, \ldots, n-1$, postupnosť má párny počet nepárnych členov a napriek tomu nie je skóre žiadneho grafu.
7. Pre ktoré n existuje graf na n vrcholoch, ktorého skóre sú všetky čísla navzájom rôzne až na 2.
8. Uveďte čo najmenší príklad grafu so 6 vrcholmi stupňa 3, ostatnými vrcholmi stupňa ≤ 2, a s 12 hranami.
9. Buď G graf s 9 vrcholmi, každý stupňa 5 alebo 6. Dokážte, že má aspoň 5 vrcholov stupňa 6 alebo aspoň 6 vrcholov stupňa 5.

Súvislosť grafu:

10. Určte najmenší počet hrán obyčajného grafu, ktorý má n vrcholov a k komponent súvislosti.
11. Určte najväčší počet hrán obyčajného grafu, ktorý má n vrcholov a k komponent súvislosti.
12. Nájdite všetky nesúvislé neizomorfné obyčajné grafy so 7 vrcholmi a 15 hranami. Dokážte, že neexistuje viacej grafov ako tie, ktoré ste práve našli.
13. Dokážte, že obyčajný graf, ktorý má n vrcholov a viac ako $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ hrán je súvislý.
14. Ak má obyčajný graf n vrcholov a každý vrchol má stupeň aspoň $\frac{n-1}{2}$, tak graf je súvislý.
15. Ak má graf n vrcholov a súčet stupňov každých dvoch vrcholov nespojených hranou aspoň $n-1$, tak graf je súvislý. Dokážte!
16. Ak má graf $n > 3$ vrcholov a pre každé $k \in N$, ktoré spĺňa nerovnosť $1 \leq k < \frac{n-1}{2}$ je počet vrcholov, ktorých stupeň neprevyšuje k menší ako k, tak graf je súvislý.
17. Rozhodnite, či platí nasledujúce tvrdenie: každý súvislý graf, ktorý má práve toľko hrán, koľko vrcholov je kružnica.

18. Ak každý vrchol grafu má párny stupeň, tak každá jeho hrana leží na nejakej kružnici. Dokážte!

Eulerovské grafy:

19. Určte najmenší počet ťahov, ktorými možno nakresliť sieť 9×9.
20. Je daný súvislý graf, v ktorom je k vrcholov nepárneho stupňa. Určte najmenší počet ťahov, ktorými ho možno nakresliť.
21. Je daný graf, ktorého každý vrchol má stupeň 4. Dokážte, že jeho hrany možno zafarbiť červenou a modrou ceruzkou tak, aby z každého vrcholu vychádzali dve modré a dve červené hrany.

Iné zaujímavé úlohy:

22. Číslo 231713 má zaujímavú vlastnosť. Všetky dvojice susedných číslic 23, 31, 17, 71, 13 tvoria rôzne prvočísla. Nájdite najväčšie číslo s touto vlastnosťou.

Prechody bludiskom:

23. Posúďte správnosť nasledujúceho algoritmu pre prechod bludiskom:
    (1) Na začiatok aj na koniec chodby položíme pri každom prechode kameň.
    (2) Ak prídeme chodbou, ktorou sme prechádzali prvýkrát, na križovatku, kde sme už predtým boli, vrátime sa rovnakou chodbou späť na jej druhý koniec.
    (3) V ostatných prípadoch dávame prednosť doteraz neoznačeným chodbám pred chodbami označenými jedným kameňom. Do chodieb označených dvoma kameňmi nevstupujeme.
    (4) Ak nemôžeme pokračovať, t.j. sme na križovatke, z ktorej vedú len chodby označené dvoma kameňmi, znamená to, že sme pri vchode, prešli sme každou chodbou práve dvakrát, a to obidvoma smermi.
24. Posúďte správnosť nasledujúceho algoritmu pre prechod bludiskom:
    (1) Na začiatok aj na koniec chodby položíme pri každom prechode kameň.
    (2) Ak prejdeme chodbou prvýkrát, dáme na jej konci prednosť neoznačenej chodbe pred chodbou označenou jedným kameňom.
    (3) Ak prejdeme chodbou druhýkrát, dáme na jej konci prednosť chodbe označenej jedným kameňom pred neoznačenou chodbou.
    (4) Do chodieb označených dvoma kameňmi nevstupujeme.
    (5) Ak nemôžeme pokračovať, t.j. sme na križovatke, z ktorej vychádzajú len chodby označené dvoma kameňmi, znamená to, že sme pri vchode a prešli sme celým bludiskom.
25. Posúďte správnosť nasledujúceho algoritmu pre prechod bludiskom:
    (1) Pri prvom prechode označíme chodby dvoma kameňmi a koniec buď jedným kameňom, ak prichádzame na križovatku, kde sme už boli, alebo troma kameňmi, ak prichádzame na križovatku, kde sme ešte neboli.
    (2) Ak vstupujeme do chodby, na začiatku ktorej je jeden kameň, pridáme k nemu ešte jeden. (Potom budú na obidvoch koncoch dva.)
    (3) Do chodieb označených dvoma kameňmi nevstupujeme. Do chodby označenej tromi kameňmi vstúpime, len keď nie je iná možnosť.

(5) Ak nemôžeme pokračovať, t.j. sme na križovatke, z ktorej vychádzajú len chodby označené dvoma kameňmi, znamená to, že sme pri vchode a prešli sme celým bludiskom a to v obidvoch smeroch.

Hamiltonovské grafy:

26. Vysvetlite, prečo splnenie Diracovej, Óreho alebo Pósovej podmienky zaručuje súvislosť grafu.

27. Ak má graf n vrcholov a aspoň $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ hrán, tak je hamiltonovský. Dokážte! Dá sa uvedený počet hrán ešte zmenšiť, aby neprestala byť zaručená hamiltonovskosť?

28. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje graf, ktorý má práve n hamiltonovských kružníc. Urobte horný odhad na počet vrcholov takéhoto grafu.

29. Koľko hamiltonovských kružníc obsahuje úplny graf na n vrcholoch?

30.

31. Nájdite graf, ktorý nespĺňa Diracovu, Oreho ani Pósovu podmienku a predsa je hamiltonovský.

Rovinné grafy:

32. Dokážte, že K_5 nie je rovinný graf.

Farebnosť grafov:

33. Nájdite rovinný graf s čo najmenším počtom vrcholov, ktorého chromatické číslo je 5.

34. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje graf G_n na n vrcholoch taký, že $\chi(G_n) = n$.