Kapitola: Kombinatorika

8.1 Princíp zapojenia a vypojenia

Príklad 8.1. V oddelení ústavu pracuje niekoľko osôb, z ktorých každá ovláda aspoň jeden cudzí jazyk: 7 osôb ovláda angličtinu, 7 nemčinu, 1 španielčinu, 8 francúštinu, 5 vie nemecky a anglicky, 4 nemecky a francúzsky, 3 francúzsky a anglicky, 1 španielsky a nemecky, 1 španielsky a anglicky, 1 španielsky a francúzsky, 2 vedia nemecky, francúzsky, anglicky, 1 vie španielsky, nemecky, anglicky, 1 španielsky, francúzsky, nemecky, 1 španielsky, francúzsky, anglicky a 1 osoba ovláda všetky 4 jazyky. Viete z údajov určiť, koľko osôb pracuje v ústave?

Príklad 8.2. Zistite počet tých prirodzených čísel neprevyšujúcich 210, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom 210.

Príklad 8.3. Zistite, koľko je takých permutácií 6-prvkovej množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ktoré nemajú ani jeden prvok na tom mieste ako v základnom usporiadaní 123456.

Príklad 8.4. Koľko existuje permutácií s práve jedným pevným bodom, resp. s práve k pevnými bodmi.

Príklad 8.5. Koľko existuje permutácií čísel 1, 2, ..., 10, v ktorých sa žiadne párne číslo nezobrazí na seba?

Príklad 8.6. Na plese je n manželských párov. Koľkými spôsobmi je možné utvoriť n tanečných párov, ak žiadna manželská dvojica netancuje spolu?

Príklad 8.7. Koľkými spôsobmi môžeme posadiť do radu 3 angličanov, 3 francúzov a 3 turkov, aby žiadny traja krajania nesedeli vedľa seba.

Príklad 8.8. Koľko existuje permutácií z n prvkov, v ktorých dané dva prvky a, b nie sú vedľa seba (na poradí nezáleží)? Dané tri prvky a, b, c nie sú vedľa seba (na poradí nezáleží)? Žiadne dva z prvkov daných troch prvkov a, b, c nie sú vedľa seba?

Príklad 8.9. Desať manželských párov cestuje vlakom v štyroch vagónoch. Koľkými spôsobmi môže týchto 20 ľudí cestovať, ak v každom vagóne musí sedieť aspoň jeden z nich a všetci príslušníci jednej rodiny musia cestovať v rôznych vagónoch?

Príklad 8.10. Koľko čísel v rozsahu 1 000 až 9 999 má vlastnosť, že dve za sebou idúce cifry nie sú rovnaké. Ako sa zmení výsledok pre rozsah: 100 000 až 999 999.

8.2 Kombinácie bez a s opakovaním

Príklad 8.11. Zistite, koľko existuje v Športke takých ťahov, ktoré neobsahujú ani jedno z čísel 1, 2, 3.

Príklad 8.12. Koľko neklesajúcich postupností dĺžky r možno zostaviť z čísel 1, 2, ..., 10 ak sa čísla: a) nemôžu opakovať, b) môžu opakovať?

Príklad 8.13. Zistite, koľko existuje v Športke takých ťahov, ktoré obsahujú aspoň jedno z čísel 47, 48, 49.

Príklad 8.14. Koľko existuje takých kombinácii 6 prvkovej množiny, že obsahujú aspoň jeden z troch pevne zvolených prvkov?

Príklad 8.15. Šiesti hráči hrajú turnaj štvorhier tenisu systémom každá dvojica s každou dvojicou (každý hráč utvorí dvojicu s každým zo zostávajúcich). Koľko zápasov sa odohrá?

Príklad 8.16. Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť 25 rovnakých mincí medzi štyroch žiakov? (Dva spôsoby sa považujú za rôzne, ak pri nich aspoň jeden žiak dostane rôzne peňažné sumy.)

Príklad 8.17. V urne máme 4 biele, 5 červených a 6 belasých guliek. Ak z nej vyberieme 4 guľky, koľkými spôsobmi môžu byť sfarbené.

Príklad 8.18. Koľkými spôsobmi môžeme rozmiestniť 20 rôznych kníh do knižnice s piatimi poličkami (predpokladajme, že na každú poličku by sa zmestilo všetkých 20 kníh).

Príklad 8.19. V rovine máme 25 bodov, z ktorých žiadne 3 nie sú kolineárne. Koľko priamok a koľko trojuholníkov určuje týchto 25 bodov.

Príklad 8.20. Koľkými spôsobmi možno umiestniť šesť rôznych šachových figúrok na šachovnicu?

Príklad 8.21. Koľkými spôsobmi môžeme na štvorcovej šachovnici so 64 poľami vybrať 3 polia tak, aby neležali v tom istom stĺpci.

Príklad 8.22. Organizačný výbor sa skladá z 11 ľudí. Materiály výboru sú uložené v trezore. Koľko zámkov musí mať trezor a koľko kľúčov treba pre každého člena výboru, aby ľubovoľná 6-tica trezor otvorila a pre menej ako 6 členov bol trezor nedostupný.

Príklad 8.23. Dve osoby si rozdeľujú $2n$ predmetov prvého druhu, $2n$ predmetov druhého druhu a $2n$ predmetov tretieho druhu a to tak, aby každá z nich dostala $3n$ predmetov. Dokážte, že počet spôsobov takéhoto rozdelenia je $3n^2 + 3n + 1$.

Príklad 8.24. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 12 osôb zo 17 keď požadujeme, aby dvaja daní ľudia neboli vybraní súčasne.

Príklad 8.25. Hádžeme 6 rozlíšiteľnými hracími kockami, ktorých steny sú očíslované číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6. V koľkých prípadoch padne:
a) práve 5 rôznych čísel
b) 6 rôznych čísel.

Príklad 8.26. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 12 mincí rovnakej hodnoty do 5 rôznych obálok tak, že ani jedna obálka nezostane prázdna?

Príklad 8.27. Hádžeme n nerozlíšiteľnými hracími kockami, ktorých steny sú očíslované číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Koľko rôznych súčtov môže vzniknúť? Koľko rôznych rozpisov existuje (počet kociek s číslom i, $1 \leq 1 \leq n$)?

Príklad 8.28. V škatuli sú biele, modré a červené guličky, z ktorých náhodne vyberiem $3n$ guličiek ($n \geq 1$). Koľko existuje rôznych farebných zostáv (na poradí guličiek v zostave nezáleží) za nasledujúcich predpokladov:

a) Ak v škatuli je z každej farby práve $3n$ guličiek?

b) Dokážte, že ak je v škatuli z každej farby práve $2n$ guličiek, je tento počet rovný

$$3n^2 + 3n + 1.$$

Príklad 8.29. Koľkými spôsobmi môžme natiahnuť 5 prsteňov na 4 prsty jednej ruky (predpokladáme, že palec je prázdny).

Príklad 8.30. Koľkými spôsobmi môžeme číslo $6k$ vyjadriť ako súčet troch rôznych prirodzených čísel?

Príklad 8.31. Koľkými spôsobmi je možné vybrať z $3n$ za sebou idúcich prirodzených čísel 3 čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný 3.

8.3 Permutácie

Príklad 8.32. Na knižnej poličke je $m + n$ rôznych kníh, z ktorých m je v čiernom obale a n v červenom. Koľko existuje permutácií týchto kníh, v ktorých knihy v čiernych obaloch zaujímajú prvých m miest? Koľko existuje permutácií, v ktorých všetky knihy v čiernych obaloch stoja vedľa seba?

Príklad 8.33. Koľko rôznych slov môžeme získať premiestňovaním písmen v slove „matematika“?

8.4 Polynomická veta a jej dôsledky

Príklad 8.34. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť $m+n+p$ predmetov do troch tried tak, aby v jednej bolo m, v druhej n a v tretej p predmetov.

Príklad 8.35. Zistite, s akým koeficientom sa objavuje x^2z^3 v rozvoji polynómu $(x+y+z)^5$:

Príklad 8.36. (a) Aký je koeficient členu x^2y^3z v rozvoji polynómu $(2x-y^2+3z)^6$.
(b) Nájdite koeficient pri x^2y^8z v $(2x+y^2-5z)^7$.
(c) Aký je koeficient pri $u^2v^3z^3$ v $(3uv-2z+u+v)^7$.

Príklad 8.37. Dokážte rovnosť:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} &= \binom{n-1}{k_1-1,k_2,\ldots,k_m}\\ &+\binom{n-1}{k_1,k_2-1,\ldots,k_m}\\ &+\cdots+\binom{n-1}{k_1,k_2,\ldots,k_m-1}\end{aligned}$$

pre $n\geq 1$, $k_1+\cdots+k_m=n$, $k_i\geq 1$.

Príklad 8.38. Jedálny lístok v školskom bufete sa nemení a skladá sa z n rôznych jedál. Aby strava bola rozmanitejšia, Peter sa rozhodol vyberať si obed každý deň iným spôsobom (môže si vybrať ľuboľný počet jedál od 0 do n). Koľko dní sa môže takto stravovať? Koľko jedál pri tom zje?

Príklad 8.39. Jedálny lístok v školskom bufete sa nemení a skladá sa z n rôznych jedál. Aby strava bola rozmanitejšia, Jožko sa rozhodol vyberať si obed každý deň iným spôsobom, môže si vybrať ľubovoľný nepárny počet jedál od 0 do n. Koľko dní sa môže takto stravovať? Koľko jedál pri tom zje?

Príklad 8.40. Je daných $(3n+1)$ predmetov, z ktorých n je rovnakých a ostatné sú rôzne. Určte, koľkými spôsobmi je možné z nich vybrať n predmetov.

Príklad 8.41. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Príklad 8.42. Dokážte, že platí
(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$ pre všetky $n\geq 1$,
(b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq e$ pre všetky $n\geq 1$,
(c) Použitím (a) i (b) dokážte, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.
(d) Dokážte, že $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leq\frac{1}{e}\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Príklad 8.43. Koľko rôznych členov vystupuje na pravej strane v sume $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ v polynomickej vete.

Príklad 8.44. Koľkými spôsobmi je možné vybrať nepárny počet predmetov z n predmetov.

Príklad 8.45. Spočítajte:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k-1)\binom{n}{k}.$$

8.5 Iné

Príklad 8.46. Koľko je všetkých deliteľov čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_r$ sú rôzne prvočísla, $\alpha_i \geq 1$? Čomu sa rovná súčet deliteľov?

Príklad 8.47. Koľko rôznych súčinov možno dostať z čísel 1, 2, 3, 5, 7, ak sa v jednom súčine činitele neopakujú.

Príklad 8.48. Ku každému dvojcifernému číslu pripočítame číslo, ktoré je zapísané tými istými ciframi, ale v opačnom poradí. Koľko z týchto súčtov je úplnym štvorcom?

Príklad 8.49. Určte počet a súčet všetkých 4-ciferných čísel zostavených z číslic 1 až 6, ktoré sú deliteľné 3.

Príklad 8.50. V urne je 100 guli: 28 červených, 20 zelených, 12 žltých, 20 modrých, 10 bielych, 10 čiernych. Aký najmenší počet guli treba vytiahnuť, aby medzi nimi bolo určite 15 guli tej istej farby.

Príklad 8.51. Koľko existuje k prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, ktoré neobsahujú žiadne dve za sebou idúce čísla.

Príklad 8.52. Koľko funkcií $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ je monotónnych, t.j. pre $i < j$ platí $f(i) \leq f(j)$.

Príklad 8.53. Koľko je r-variácií n prvkovej množiny, ktoré fixný prvok z množiny obsahujú a koľko je takých, ktoré daný fixný prvok neobsahujú.

Príklad 8.54. Krotiteľ šeliem chce priviesť do manéže n levov a k tigrov, pričom žiadne 2 tigre nesmú ísť bezprostredne za sebou. Koľkými spôsobmi môže šelmy zoradiť? Preveďte diskusiu vzhľadom k voľbe n a k.

Príklad 8.55. Koľko existuje 10 ciferných čísel, v ktorých je súčet číslic rovných 3: a) za predpokladu, že prvá cifra je rôzna od nuly? b) v prípade čísiel od 1 do 9 999 999?

Príklad 8.56. Koľko existuje trojuholníkov s celočíselnými stranami, ktorých obvod je 40, resp. 43.

Príklad 8.57. Dokážte, že počet trojuholníkov s celočíselnými stranami a s obvodom $4n + 3$ je o $n + 1$ väčší než počet trojuholníkov s celočíselnými stranami a obvodom $4n$.

Príklad 8.58. V koľkých císlach od 1 do 999: sa vyskytuje číslica 9, číslica 0, číslica 9 dvakrát, číslica 0 dvakrát, číslice 0 a 9 súčasne, číslice 8 a 9 súčasne.

Príklad 8.59. Dokážte (napr. matematickou indukciou) vylepšený odhad pre faktoriál:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \geq 1$$

Príklad 8.60. Máme 3 sliepky, 4 kačky a 2 husy. Koľko existuje možností pre výber takých skupín, v ktorých sa vyskytuje aspoň 1 sliepka, aspoň 1 kačka a aspoň 1 hus.

Príklad 8.61. Uvažujme kocky domina od (0,0), ..., (n, n). Ukážte, že počet kociek so súčtom ôk $(n - r)$ sa rovná počtu kociek so súčtom $(n + r)$, pričom tento počet sa rovná $\lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor$. Zistite celkový počet kociek domina.

Príklad 8.62. Určte súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré je možné napísať pomocou cifier 1, 2, 3, 4.

Príklad 8.63. Určte súčet všetkých päťciferných čísel, ktoré je možné zapísať pomocou cifier 1, 2, 3, 4, 5, pričom každá cifra sa vyskytuje práve raz. Tú istú úlohu riešte pre päťciferné čísla, ktoré je možné zapísať pomocou cifier 1, 2, 3, ..., 9 – každá cifra sa vyskytuje najviac raz.

Príklad 8.64. Tridsať maturantov jedného gymnázia si podalo prihlášku na ďalšie štúdium na niektorú zo šiestich fakúlt Slovenskej technickej univerzity. Využili možnosť podať viac prihlášok a tak polovica žiakov podala prihlášku aspoň na tri fakulty. Tretina študentov si podala prihlášku na viac ako tri fakulty. Na fakultu architektúry sa vzhľadom na talentové prijímacie skúšky nehlásil nikto. Dokážte, že na niektorú zo zvyšných piatich fakúlt sa prihlásilo menej ako dvadsať študentov.

Príklad 8.65. Máme n žiaroviek – každá z nich svieti (je v stave 1) alebo je zhasnutá (je v stave 0). Okrem týchto žiaroviek máme jedno tlačidlo, ktoré je naprogramované tak, že vždy po stlačení vykoná takúto činnosť: nájde pozíciu najľavejšej rozsvietenej žiarovky a zapamätá si ju ako i, potom nájde pozíciu najpravejšej zhasnutej žiarovky a zapamätá si ju ako j. Ak také pozície existujú a $i < j$, potom i-tu žiarovku zhasne a j-tu žiarovku rozsvieti. V niektorých situáciach stlačenie tlačidla už nič nezmení – hovoríme tomu stabilný stav.

a) Zistite, koľko existuje stabilných stavov pre n žiaroviek.

b) Zistite, koľko existuje rôznych počiatočných stavov pre n žiaroviek, z ktorých po jednom stlačení tlačidla nastane stabilný stav.