Kapitola: Sumy

Príklad 5.1. $T_0 = 5$, $2T_n = nT_{n-1} + 3n!$

Príklad 5.2. $3T_n = 4T_{n-1} + 6$, $T_0 = 0$.

Príklad 5.3. Rozpíšte nasledujúcu sumu $\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk}$ podľa i, j, k a podľa k, j, i.

Príklad 5.4. Čo je chybné na sume:

$$\left(\sum_{1\le j\le n} a_j\right)\left(\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le n} \frac{a_j}{a_k} = \sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le k\le n} \frac{a_k}{a_k} = \sum_{1\le k\le n} n = n^2$$

Príklad 5.5. Spočítajte:

$$\sum_{1\le j<k\le n} \frac{1}{k-j}.$$

(Výsledok môže obsahovať H_n, ale nesmie obsahovať explicitne súčet $\sum$.)

Príklad 5.6. Spočítajte nasledujúcu sumu: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Príklad 5.7. Spočítajte nasledujúcu sumu: $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{k(k+1)}$.

Príklad 5.8. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k$ (perturbáciou $\sum_{k=1}^{n} k\mathcal{H}_k$)

Príklad 5.9. Spočítajte: $\displaystyle\sum_{1\le k<n} k\cdot\mathcal{H}_k$.

Príklad 5.10. Spočítajte: $\displaystyle\sum_{1\le k<n} \mathcal{H}_k k(k-1)$.

Príklad 5.11. Spočítajte: $\displaystyle\sum_{1\le k<n} (-1)^k\mathcal{H}_k$.

Príklad 5.12. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n-k)}$.

Príklad 5.13. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n-k)}\cdot k$.

Príklad 5.14. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n-k)}\cdot k^2$.

Príklad 5.15. Spočítajte: $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Príklad 5.16. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. (Počet operácií potrebných na vytvorenie haldy z n prvkov je $(2^{\lfloor \log n\rfloor+1})\sum_{k=1}^{\lfloor \log n\rfloor+1} \frac{k}{2^k}$)

Príklad 5.17. Použitím distributívneho, komutatívneho a asociatívneho zákona dokážte, že:

$$\sum_{0\le k<n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\le k<n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k), n>0$$

Príklad 5.18. Spočítajte: $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Príklad 5.19. Spočítajte: $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{j-1}{m}\right)$. (priemerný počet operácií pri úspešnom vyhľadávaní v hašovacej tabuľke veľkosti n obsadenej m prvkami keď sa kolízie riešia zreťazovaním.)

Príklad 5.20. Spočítajte: $\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(k-2)(k-3)$.

Príklad 5.21. Spočítajte nasledujúcu sumu:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}\,.$$

Príklad 5.22. Spočítajte nasledujúcu sumu:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4^k}\,.$$

Príklad 5.23. Spočítajte nasledujúcu sumu: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{3k+1}{k(k+1)}$.

Príklad 5.24. Spočítajte nasledujúcu sumu: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lfloor \lg(k+2) \rfloor - \lceil \lg(k+1) \rceil$.

Príklad 5.25. Spočítajte nasledujúcu sumu: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Príklad 5.26. Dokážte, že platí $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k)$.

Príklad 5.27. Pomocou predchádzajúceho vzťahu spočítajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 k \rfloor$. (Súčet dĺžok ciest od koreňa ku všetkým n vrcholom v úplnom binárnom strome.)

Príklad 5.28. Spočítajte prevedením na súčet C_n, kde $C_n = (1 + \frac{1}{n})C'_n - 1$ a $C_n = 1 + \frac{C'_0 + C'_1 + \cdots + C'_{n-1}}{n}$. (Priemerný počet porovnávaní pri úspešnom vyhľadávaní v binárnom vyhľadávacom strome.)

Príklad 5.29. Ukážte, že $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{k}{m}} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha} + O(n^{-1})$, kde $\alpha = \frac{n}{m}$. (Očakávaný počet porovnaní pri úspešnom vyhľadávaní v hašovacej tabuľke veľkosti n zaplnenej m prvkami, keď sa kolízie riešia otvoreným adresovaním.)

Čebyševove nerovnosti

Príklad 5.30. Nech $a_1, \ldots, a_n$ sú nezáporné reálne čísla, pre ktoré platí $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Dokážte, že potom pre každé reálne číslo x platí:

$$x^2 + x \left(\sum_{1 \le i \le n} a_i \right)^2 + n^3 \sum_{1 \le i \le n} a_i^4 > 0.$$

Príklad 5.31. Nech $n \in N$. Nájdite všetky n-tice reálnych čísel $x_1 \le \cdots \le x_n$ pre ktoré platí

$$\left(\sum_{1 \le i \le n} x_i \right)^2 \le n \sum_{1 \le i \le n} x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

Iné

Príklad 5.32. Číslo 15 môžeme vyjadriť štyrmi spôsobmi ako súčet za sebou idúcich prirodzených čísel: $15, 7+8$, $4+5+6$, $1+2+3+4+5$. Koľkými spôsobmi možno takto vyjadriť a) číslo 1050, b) ľubovoľné prirodzené číslo n.