Rýchlosť rastu, odhady na rýchlosť rastu

Príklad 3.1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich odhadov sú správne a ktoré nie:

1. $10n^2 + 9 = O(n)$
2. $n^{2^n} + 6 \cdot 2^n = \Theta\left(2^{2^n}\right)$
3. $5n^2 - 6n = \Theta(n^2)$
4. $\frac{n^2}{\log n} = \Theta(n^2)$
5. $\frac{6n^3}{(\log n+1)} = O(n^3)$
6. $33n^3 + 4n^2 = \Omega(n^3)$
7. $n! = O(n^n)$
8. $n! = \Omega(2^n)$
9. $2n^2 2^n + n \log n = \Theta(n^2 2^n)$
10. $n^{1.001} + n \log n = \Theta(n^{1.001})$
11. $\sum i = \Theta(n^2)$

Príklad 3.2. Zaraďte do nasledujúcej postupnosti fciu: $2^{\sqrt[m]{\log n}}$, pre $m > 1$:

$$1 \preceq \log\log n \preceq \log n \preceq n^\varepsilon \preceq n^c \preceq n^{\log n} \preceq c^n,$$

kde $0 < \varepsilon < 1 < c$.

Príklad 3.3. Usporiadajte podľa rýchlosti rastu:

$$\sqrt{n}\log^2 n, n, 5, n^n, \log n, \sqrt{n}, \left(\frac{3}{2}\right)^n, n\log n, \log\log n, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \log^2 n, \frac{n}{\log n},$$

Príklad 3.4. Usporiadajte podľa rýchlosti rastu:

$$n^2, n\ln n, (\ln n)^{\ln n}, (\ln\ln n)^{\ln n}, n2^{\ln\ln n}, (\ln n)^{\ln\ln n}, ne^{\sqrt{\ln n}}, n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}, n^{1+\frac{1}{\ln n}}$$

Príklad 3.5. Dokážte základné vlastnosti relácie $\prec$.

Príklad 3.6. Dokážte, že $\log f(n) \prec \log g(n) \implies f(n) \prec g(n)$. Platí aj opačná implikácia? Ak nie, uveďte protipríklad.

Príklad 3.7. Dokážte správnosť zoradenia funkcií pre $0 < \varepsilon < 1 < c$:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^\varepsilon \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}.$$

Príklad 3.8. Zoraďte podľa rýchlosti rastu: $(\sqrt{2})^{\log_2 n}$, n^2, $\left(\frac{3}{2}\right)^n$, n^3, $\log_2 n^2$, 2^{2^n}, $n^{1/log_2 n}$, $\ln\ln n$, $n \cdot 2^n$, $n^{\log_2 n \log_2 n}$, $\ln n$, 1, $2^{\log_2 n}$, $(\log_2 n)^{\log_2 n}$, e^n, $4^{\log_2 n}$, $\sqrt{\log_2 n}$, $2^{\sqrt{2\log_2 n}}$, n, 2^n, $n\log_2 n$, $2^{2^{n+1}}$.

Príklad 3.9. Nech $p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$, kde $a_d > 0$ je polynóm stupňa d v premennej n, k je konštanta. Urobte diskusiu rôznych odhadov podľa hodnôt d a k.

Príklad 3.10. Doplňte nasledujúcu tabuľku YES a NO podľa toho, či A je O, o, Ω, ω alebo Θ od B, $k \geq 1$, $\varepsilon > 1$, $c > 1$ sú konštanty.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\log_2^k n$	n^ε					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log_2 m}$	$m^{\log_2 n}$					
$\log_2(n!)$	$\log_2(n^n)$					

Príklad 3.11. Nech $f(n)$ a $g(n)$ sú asymptoticky kladné funkcie. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) $f(n) = O(g(n))$ implikuje $g(n) = O(f(n))$.

b) $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

c) $f(n) = O(g(n))$ implikuje $\log_2 n(f(n)) = O(\log_2(g(n)))$, kde $\log_2(g(n)) > \varepsilon > 0$ a $f(n) \geq 1$ pre všetky dostatočne veľké n.

d) $f(n) = O(g(n))$ implikuje $\log_2 n(f(n)) = O(\log_2(g(n)))$, kde $\log_2(g(n)) > 0$ a $f(n) \geq 1$ pre všetky dostatočne veľké n.

e) $f(n) = O(g(n))$ implikuje $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

f) $f(n) = O((f(n))^2)$.

g) $f(n) = O(g(n))$ implikuje $g(n) = \Omega(f(n))$.

h) $f(n) = \Theta(f(n/2))$.

i) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

j) $O(f(n) + g(n)) = f(n) + O(g(n))$ pre všetky $f(n), g(n) > 0$.

k) $f_1(n) \prec g_1(n)$ a $f_2(n) \prec g_2(n)$ implikuje $f_1(n) + f_2(n) \prec g_1(n) + g_2(n)$.

h) $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$.

Príklad 3.12. Čo rastie rýchlejšie

a) $n^{\ln n}$ alebo $(\ln n)^n$?

b) $n^{\ln \ln \ln n}$ alebo $(\ln n)!$?

c) $(n!)!$ alebo $((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$?

d) $F^2_{\lceil H_n \rceil}$ alebo H_{F_n}?

Príklad 3.13. Nájdite príklad funkcií $f(n)$ a $g(n)$ takých, že neplatí ani jedna z relácií $f(n) \prec g(n)$, $f(n) \succ g(n)$, $f(n) \asymp g(n)$, napriek tomu, že aj $f(n)$ aj $g(n)$ rastú monotónne do ∞.

Asymptotické riešenia rekurentných rovníc

Príklad 4.1. a) $T(n) = 2T(n/2) + n^3$,

b) $T(n) = T(9n/10) + n$,

c) $T(n) = 16T(n/4) + n^2$,

d) $T(n) = 7T(n/3) + n^2$,

e) $T(n) = 7T(n/2) + n^2$,

f) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$,

g) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$,

h) $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$,

i) $T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$,

j) $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$,

k) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$,