Riešenie rekurentných rovníc

Príklad 2.1. Riešte nasledujúce rekurentné rovnice a urobte skúšku správnosti: $u_n+u_{n-1}-u_{n-2}-u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = 2$.

Príklad 2.2. $u_n + 2u_{n-1} - 11u_{n-2} - 12u_{n-3} + 36u_{n-4} = 0$ pre $n \geq 4$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 2$, $u_1 = -9$, $u_2 = 41$, $u_3 = -205$.

Príklad 2.3. $u_n - 2u_{n-1} - 5u_{n-2} + 6u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 17$.

Príklad 2.4. $u_n - 2u_{n-1} - 2u_{n-2} = 0$ pre $n \geq 2$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.

Príklad 2.5. Nájdite uzavretú formulu pre nasledujúcu rekurentnú rovnicu:

$$a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = -29$$

Urobte skúšku správnosti.

Príklad 2.6. Nájdite uzavretú formulu pre nasledujúce rekurentné rovnice:
a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$,
b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,
c) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$,
d) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n$
e) $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2_{n+1} - a_n$, aa) $a_0 = 0$, bb) $a_0 = 1$,
f) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $2a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$,
g) $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$.
Urobte skúšku správnosti.

Príklad 2.7. a) Riešte rekurenciu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0$ s počiatočnou podmienkou $a_0 = 1$.
b) Riešte rekurenciu $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + \cdots + a_1 + a_0$ s počiatočnou podmienkou $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Príklad 2.8. $f(1) = 2$, $f(2n) = 2f(n) + 2$, $f(2n+1) = 2f(n) + 2$ pre $n \geq 1$.

Príklad 2.9. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n-1) + n$ pre $n \geq 2$.

Príklad 2.10. Riešte rekurenciu: $T_0 = 5$, $2T_n = nT_{n-1} + 3n!$

Príklad 2.11. Riešte rekurenciu:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \\ n^2C_n &= (n+1)^2C_{n-1} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad n > 0. \end{aligned}$$

Príklad 2.12. Riešte rekurenciu: $3T_n = 4T_{n-1} + 6$, $T_0 = 0$.

Príklad 2.13. Nájdite uzavretú formulu pre a_n, ak poznáte rekurentný vzorec $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ a prvé členy $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

Príklad 2.14. Riešte rekurenciu: $T_0 = 2$, $nT_n = (n+1)T_{n-1} + 2n$, $\quad n > 0$.

Príklad 2.15. Riešte rekurenciu: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$, $\quad n > 1$. (Pomôcka: zlogaritmujte)

Príklad 2.16. Riešte rekurenciu: $a_0 = 0$, $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, $\quad n > 0$.

Príklad 2.17. Riešte rekurenciu: $a_n = a_{n-1}^2 - 2$, $\quad n > 0$. Urobte diskusiu vzhľadom na a_0. (Pomôcka: substitúcia $a_n = b_n + 1/b_n$.)

Príklad 2.18. Dokážte matematickou indukciou, že $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \hat{\Phi}^n)$ je riešením rekurencie pre Fibonacciho čísla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, pre $n > 1$ a $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\hat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Príklad 2.19. Riešte rekurenciu

a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pre $n > 1$ a $a_0 = p$ a $a_1 = q$,

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + r$ pre $n > 1$ a $a_0 = p$ a $a_1 = q$.
V oboch prípadoch vyjadrite výsledok pomocou Fibonacciho čísiel.

Príklad 2.20.

a) Nájdite inicializačné podmienky a_0, a_1, pre ktoré má rekurencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n > 1$, riešenie $a_n = 2^n$.

b) Existujú inicializačné podmienky, pre ktoré by bolo riešením $a_n = 2^n - 1$?