Kapitola: Rekurentné problémy

Príklad 1.1. Riešte Hanojské veže s obmedzením, že sa nemôžu prenášať priamo disky z A na B a z B na A, t.j. každý ťah musí byť buď z tyče alebo na tyč C. Nájsť najkratšiu postupnosť ťahov, ktorou prenesieme vežu z A na B. (Rekurentný vzťah a jeho riešenie.)

Príklad 1.2. Ukážte, že pri prenášaní diskov podľa predchádzajúcej úlohy budú dosiahnuté všetky možné konfigurácie rozostavania n diskov na 3 tyčiach.

Príklad 1.3. Existuje nejaké počiatočné a koncové rozostavenie diskov, ktoré by boli vzdialenejšie než $2^n - 1$ prenosov, pri platnosti pôvodnych pravidiel prenášania diskov v hlavolame Hanojských veží?

Príklad 1.4. Dvojitá Hanojská veža má z disku každej veľkosti dva kusy. Pravidlá prenášania sú rovnaké ako v pôvodnom hlavolame, navyše môžme položiť na seba aj dva disky rovnakej veľkosti. Aký je minimálny počet presunov potrebný na prenesenie veže z A na B a) ak sú disky rovnakej veľkosti nerozlíšiteľné, b) ak sú rozlíšiteľné.

Príklad 1.5. Riešte rekurentnú rovnicu: $Q_0 = \alpha$, $Q_1 = \beta$, $Q_n = (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2}$ pre $n > 1$. Predpokladáme, že $Q_n \neq 0$ pre všetky $n \geq 0$.

Príklad 1.6. Aký je maximálny počet L_n oblastí určených n priamkami v rovine?

Príklad 1.7. Pri Vennových diagramoch 3 kružnice môžu ohraničovať 8 rôznych oblastí. Môžu 4 kružnice ohraničovať 16 rôznych oblastí?

Príklad 1.8. Na aký najväčší počet oblastí môžme rozdeliť rovinu n (ostrouhlými) výsekmi.

Príklad 1.9. Koľko najviac je ohraničených oblastí v rovine, ktoré dostaneme umiestnením n priamok v rovine?

Príklad 1.10. Nech $H_n = J_{n+1} - J_n$, kde J_n odpovedá značeniu podľa Jozefovej úlohy. Z rovníc pre J_n dostávame $H(2n) = 2$ a $H(2n+1) = 2H(n) - 2$, pre všetky $n \geq 1$. To teda vyzerá, že sme schopní dokázať $H(n) = 2$ pre všetky n, indukciou podľa n. Kde je chyba?

Príklad 1.11. Odvoďte v Jozefovej úlohe vzťah pre predposledného vypadávajúceho.

Príklad 1.12. Koľko slov dĺžky n zložených z troch písmen a, b, c neobsahuje dvojicu bezprostredne za sebou nasledujúcich a?

Príklad 1.13. Zafarbime polia zovšebecnenej šachovnice – pásu $1 \times n$ $(n \geq 1)$ bielou, modrou a červenou farbou. Koľko je takých zafarbení, pri ktorých nie sú žiadne dve susedné polia zafarbené rovnakou farbou?

Príklad 1.14. Koľko postupností dĺžky n zložených z núl a jedničiek neobsahuje žiadne dve jednotky bezprostredne za sebou?

Príklad 1.15. Neposedný Moricko behá stále hore po schodoch, pričom v každom kroku vie naraz vystúpiť o jeden, alebo dva schody. Momentálne stojí pod schodiskom s n schodami a snaží sa vypočítať, koľkými rôznymi spôsobmi vie vystúpiť na n-ty schod, napr. pre $n = 3$ sú tri možností (1,1,1); (2,1); (1,2). Viete mu pomôcť spočítať, koľko spôsobov je možných pre všeobecné $n \in N$.