

## Úlohy 2 (21.2.2022)

Termín do najbližších cvičení, najneskôr **1. marec 2022**, nahrajte do moodle (odfoťte/nascanujte, skontrolujte si čitateľnosť!). Každý príklad píšete na samostatný papier! Nezabudnite sa podpísať a uviesť skupinu kam chodíte na cvičenia (meno cvičiaceho resp. čas cvičenia a miestnosť). **Napíšte na vaše riešenie aj identifikátor, pod ktorým ste/budete v tabuľke bodov - max 6 znakov.**

Vždy uveďte aj zdôvodnenie (dôkaz) vášho riešenia! (Nestačí len áno/nie alebo číslo.)

Opísané riešenia sú za 0b (aj opisované aj opísané, nebudeme zisťovať čo je originál).

Definícia: Nech  $\Sigma$  je abeceda. Majme  $A \subseteq \Sigma$ .  $A^0 = \{\lambda\}$ ,  $A^1 = A$  a pre  $n \in \mathbb{N}$  je  $A^{n+1} = AA^n$ .

$$A^+ = \bigcup_{n \in (\mathbb{N} - \{0\})} A^n \text{ a } A^* = A^+ \cup \{\lambda\}.$$

### príklad 1.

Dokážte alebo uveďte protipríklad.  $A, B$  sú jazyky nad abecedou  $\Sigma$ .

- $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$
- $(A \cup B)^* = (A^* B^*)^*$
- $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

### príklad 2.

Sú nasledujúce tvrdenia pravdivé? Svoju odpoveď dokážte!

- $L_1$  a  $L_2$  sú jazyky. Ak  $L_1^* = L_2^*$ , tak  $L_1 = L_2$ .
- Jazyky  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \bmod 2 = 0\}$  a  $\{xy \in \{a, b\}^* \mid |x| = |y|\}$  su rovnaké.

Pomocou jazykov  $L_a = \{a\}$ ,  $L_b = \{b\}$ , množinových operácií a zretiazenia vyjadrite jazyk, ktorý obsahuje všetky slová nad abecedou  $\{a, b\}$  (nezabudnite zdôvodniť/dokázať),

- ktoré začínajú a končia rôznym písmenom a majú nepárnu dĺžku.
- ktoré neobsahujú dve  $a$  po sebe a ich dĺžka je najviac  $k$ . Pre  $k \geq 4$  sem patrí napríklad slovo  $abba$ , ale nie slovo  $baab$ .

### príklad 3.

Podslovo  $v$  slova  $x$ ,  $v \neq x$  sa nazýva **hranica**, keď je  $v$  prefixom aj sufixom slova  $x$ . Najdlhšiu hranicu  $x$  označíme  $\text{Hranica}[x]$ .

Tabuľka hraníc neprázdneho slova  $x$  má pozície  $0, \dots, \text{len}(x)$  a je definovaná nasledovne:  $\text{hranica}[0] = -1$  a pre  $0 < k \leq \text{len}(x)$  ako  $\text{hranica}[k] = |\text{Hranica}[x[0 : k]]|$  (pozor na hodnoty, hranica má čísla a  $\text{Hranica}$  slová).

pre slovo  $x = abaababaaba$  je tabuľka hranica takáto:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x[i]$	a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	
$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\text{hranica}[k]$	-1	0	0	1	1	2	3	2	3	4	5	6

Nasledujúci program počíta hodnoty tabuľky hranica, pre neprázde slovo  $x$ :

```
def hranice(x): # x je neprazdne slovo
    hranica = [0 for _ in range(len(x)+1)]
    hranica[0] = -1
    for i in range(len(x)):
        k = hranica[i]
        while k >= 0 and x[i] != x[k]:
            k = hranica[k]
        hranica[i+1] = k + 1
    return hranica
```

Dokážte a) jeho správnosť, b) že vykoná maximálne  $2|x|$  porovnaní dvoch znakov (pomôcka: všimnite si hodnoty  $2i - k$ ).

Všimnite si, že platí  $Hranica[c] = "$ , pre všetky symboly  $c$  abecedy. Keď zoberieme neprázde slovo  $x$  a jeho prefix  $u$ ,  $c$  je symbol abecedy, platí:

$$Hranica[uc] = \begin{cases} Hranica[u]c, & \text{keď je } Hranica[u]c \text{ prefix } u \\ Hranica[Hranica[u]c] & \text{inak} \end{cases}$$