Riešenie DU 6.2 a niečo navyše

Tieto príklady z domácej úlohy sú na precvičenie dokazovania, že nejaký jazyk nie je regulárny. Pri dôkaze budeme využívať skrátenú (ale korektnú) verziu Lemy 3.12

Nech $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat(KA), $x, y \in \Sigma^*$.
Ak $\widetilde{\delta}(q_0, x) = \widetilde{\delta}(q_0, y)$ potom $\forall z \in \Sigma^*\ xz \in L(A) \Leftrightarrow yz \in L(A)$ (*)

Keďže vlastnosť (*) platí pre každý konečný automat, môžme ju použiť k dôkazu neregulárnosti nejakého jazyka sporom nasledovne.

1. Predpokladáme, že jazyk L je regulárny, z čoho vyplýva, že existuje konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L = L(A)$.
2. Vyargumentujeme existenciu troch slov $x, y, z \in \Sigma^*$ takých, že
$$\widetilde{\delta}(q_0, x) = \widetilde{\delta}(q_0, y), \text{ pričom } xz \in L(A) \wedge yz \notin L(A) \qquad (**)$$
3. Keďže (**) dokazuje, že pre A neplatí (*), máme spor s predpokladom, že L je regulárny.

Dôraz je na argumentácii (2.).
Ak máme KA A s množinou stavov $Q, |Q| = k$, tak **vždy**, keď vezmeme $k+1$ rôznych slov $w_1, \ldots, w_{k+1}$, musia medzi nimi existovať $w_i \neq w_j$ tak, že A po ich dočítaní skončí v rovnakom stave, teda $\widetilde{\delta}(q_0, w_i) = \widetilde{\delta}(q_0, w_j)$.

My ale musíme množinu $W = \{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$ konštruovať tak, aby sme pre **ľubovoľnú** dvojicu rôznych slov $w_i, w_j \in W$ vedeli nájsť z tak, aby $w_i z \in L(A) \wedge w_j z \notin L(A)$. Uvedomme si, že my naozaj nemôžme ovplyvniť to, pre ktoré $i \neq j$ platí $\widetilde{\delta}(q_0, w_i) = \widetilde{\delta}(q_0, w_j)$, pretože o automate A vieme len to, že $L = L(A)$ (toto je častá chyba, že hoci aj W popíšete korektne, o i, j predokladáte niečo viac ako to, že $i \neq j$, resp. $i < j$ alebo $j < i$)

A teraz k riešeniu príkladov z domácej úlohy. V oboch prípadoch ukážeme, že jazyk nie je regulárny.

Príklad 2a: $L = \{0^n 1^{3n} 0^{2n}\ |n \in N\}$ nie je regulárny.

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že jazyk L je regulárny a $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je KA taký, že $L = L(A)$.
Definujme množinu slov $W = \{0^i, i = 1, 2, \ldots, |Q|+1\}$. Keďže $|W| > |Q|$ existujú $1 \leq i < j \leq |Q|+1$ tak, že $\widetilde{\delta}(q_0, 0^i) = \widetilde{\delta}(q_0, 0^j)$.

Označme $x := 0^i$, $y := 0^j$. Potom pre $z := 1^{3i}0^{2i}$
$xz = 0^i 1^{3i} 0^{2i} \in L$
$yz = 0^j 1^{3i} 0^{2i} \notin L$, keďže $i \neq j$
Dostali sme sa k sporu s (*), preto predpoklad o existenii KA A, $L = L(A)$ je nesprávny, čo dokazuje, že L nie je regulárny. □

Príklad 2b: $L = \{a^n b^m\ |n > 2m, n, m \in N\}$ nie je regulárny.

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že jazyk L je regulárny a $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je KA taký, že $L = L(A)$.
Definujme množinu slov $W = \{a^{2i}, i = 1, 2, \ldots, |Q|+1\}$. Keďže $|W| > |Q|$ existujú $1 \leq i < j \leq |Q|+1$ tak, že $\widetilde{\delta}(q_0, a^{2i}) = \widetilde{\delta}(q_0, a^{2j})$.

Označme $x := a^{2j}$, $y := a^{2i}$. Potom pre $z := b^i$
$xz = a^{2j}b^i \in L$, lebo $2j > 2i$
$yz = a^{2i}b^i \notin L$, lebo $2i = 2i$
Dostali sme sa k sporu s (*), preto predpoklad o existenii KA A, $L = L(A)$ je nesprávny, čo dokazuje, že L nie je regulárny. $\square$

Ešte jeden príklad. $\mathbf{L} = \{\mathbf{ww^R}, \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*\}$ nie je regulárny.

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že jazyk L je regulárny a $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je KA taký, že $L = L(A)$.
Definujme množinu slov $W = \{a^i b, i = 1, 2, \ldots, |Q| + 1\}$. Keďže $|W| > |Q|$ existujú $1 \leq i < j \leq |Q| + 1$ tak, že $\widetilde{\delta}(q_0, a^i b) = \widetilde{\delta}(q_0, a^j b)$.

Označme $x := a^i b$, $y := a^j b$. Potom pre $z := ba^i$
$xz = a^i bba^i \in L$
$yz = a^j bba^i \notin L$, lebo $i < j$
Dostali sme sa k sporu s (*), preto predpoklad o existenii KA A, $L = L(A)$ je nesprávny, čo dokazuje, že L nie je regulárny.

Malá poznámka k príkladu - v minulosti sa viackrát stalo, že študenti použili množinu $W = \{a^i, i = 1, 2, \ldots, |Q| + 1\}$, prípadne $W = \{a^{2i}, i = 1, 2, \ldots, |Q| + 1\}$. Uvedomte si, že zreťazením slov xz a yz nad jednopísmenkovou abecedou neviete dosiahnuť, aby jedno z nich bolo párnej dĺžky a druhé nie (čo je ekvivalent toho, že jedno je z jazyka a druhé nie.) Použitie b tu slúži ako akýsi oddeľovač, ktorý *jednoznačne* určuje ukončenie w v potenciálnom ww^R $\square$

Upozornenie na záver: všimnite si, že som sa odvolávala na (*) a používala som značenie x, y, z dôsledne v súlade so značením použitým pri znení tvrdenia, ktoré pri dokazovaní používam. Ak by som znenie tvrdenia nenapísala dopredu, musela by som znenie písať do každého riešenia.
Preto by sme namiesto *Dostali sme sa k sporu s (*), preto predpoklad o existenii KA A, $L = L(A)$ je nesprávny, čo dokazuje, že L nie je regulárny.*

museli písať niečo ako
Dostali sme sa do sporu s tvrdením lemy 3.12., podľa ktorého

$$\text{ak } \widetilde{\delta}(q_0, x) = \widetilde{\delta}(q_0, y), \text{ potom } \forall z \in \Sigma^* \ xz \in L(A) \Leftrightarrow yz \in L(A).$$

Preto je predpoklad o existenii KA A, $L = L(A)$ nesprávny, čo dokazuje, že L nie je regulárny.