ÚVOD DO TI 2015

poznámky k príkladu 2.1

(autor Martin Baláž)

1a) (3b) Nech A, B sú jazyky. Potom $(A \cup B)^* = A^*(BA^*)^*$.

Dôkaz.

($\subseteq$) Nech $w \in (A \cup B)^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cup B)^i$. Potom existuje $i \in \mathbb{N}$ také, že $w \in (A \cup B)^i$, t.j. $w = w_1 w_2 \cdots w_i$ pre nejaké $w_1, w_2, \ldots, w_i \in A \cup B$. Matematickou indukciou na $1 \leq j \leq i$ ukážeme, že $w_{i-j+1} \cdots w_i \in A^*(BA^*)^*$. Potom aj pre $j = i$ platí, že $w = w_1 w_2 \cdots w_i \in A^*(BA^*)^*$.

(a) $w_{i+1} \cdots w_i = \lambda = \lambda\lambda \in A^*(BA^*)^*$.

(b) Nech $w_{i-j+1} \cdots w_i \in A^*(BA^*)^*$.

- Ak $w_{i-j} \in A$ tak $w_{i-j} w_{i-j+1} \cdots w_i \in AA^*(BA^*)^*$. Platí, že $AA^*(BA^*)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$.
- Ak $w_{i-j} \in B$ tak $w_{i-j} w_{i-j+1} \cdots w_i \in BA^*(BA^*)^*$. Platí, že $BA^*(BA^*)^* \subseteq (BA^*)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$.

($\supseteq$) Nech $w \in A^*(BA^*)^*$. Potom $w = w_1 w_2$ pre nejaké $w_1 \in A^*$ a $w_2 \in (BA^*)^*$. Ukážeme, že $w_1, w_2 \in (A \cup B)^*$. Potom tiež $w = w_1 w_2 \in (A \cup B)^*(A \cup B)^* = (A \cup B)^*$.

Keďže $A \subseteq A \cup B$ a $B \subseteq A \cup B$, tak $w_1 \in A^* \subseteq (A \cup B)^*$ a $w_2 \in (BA^*)^* \subseteq ((A \cup B)(A \cup B)^*)^* \subseteq ((A \cup B)^*)^* = (A \cup B)^*$. □

1b) (3b) Nech A, B sú jazyky. Potom $(AB)^* = \{\lambda\} \cup A(BA)^*B$.

Dôkaz. $(AB)^* = \{\lambda\} \cup AB(AB)^* = \{\lambda\} \cup A(BA)^*B$ □

1c) (4b) Nech L je konečný jazyk, h je homomorfizmus, a pre každé $a \in \Sigma$ platí: $|h(a)| > 1$. Potom $h(L)$ je nekonečný jazyk.

Dôkaz. Nech $h(L)$ je konečný jazyk a n je najväčšia dĺžka slov v $h(L)$. Keďže Σ je konečná abeceda a L je nekonečný jazyk, L obsahuje slovo w také, že $|w| > n$ (lebo slov w s $|w| \leq n$ je konečne vela). Potom $|h(w)| \geq 2|w| \geq |w| > n$. Máme spor pretože n nie je najväčšia dĺžka slov v $h(L)$, teda $h(L)$ je nekonečný jazyk. □

Najčastejšie chyby:

- Zdôvodnenie všeobecného vzťahu iba na konkrétnom príklade. To, že to platí pre jeden príklad, ešte neznamená, že to platí aj vo všeobecnosti.
- Preskočenie zdôvodnenia vetami typu: ”Je jasné, že to platí.“
- Neošetrené okrajové prípady, napr. prázdne slovo a pod.
- Nezmyselná formálna notácia, napr. množina implikuje množinu a pod.

poznámky k príkladu 2.2

(autor: Askar Gafurov)

Typické chyby

Definícia inverzného homomorfizmu

Inverzný homomorfizmus nie je homomorfizmus (neplatí $h^{-1}(ab) = h^{-1}(a)h^{-1}(b)$). Nie je to ani zobrazenie. Je to vzor množiny v zobrazení $h(x)$.

Čo to znamená pre nás? To, že ho netreba "dodefinovávat", ku každému homomorfizmu je už raz priradený definíciou ($h^{-1}(x) := \{w \in \Sigma_1^* : h(w) = x\}$).

Konkrétne, ak máme definovaný homomorfizmus $\forall x \in \Sigma_1 : h(x) = \lambda$, tak $h^{-1}(\lambda)$ nie je $\{\lambda\}$, ale Σ_1^* (lebo všetky slová sa zobrazia na prázdne slovo).

Štruktúra dôkazu

Dôkaz rovnosti dvoch množín (napr. jazykov)

Dôkaz rovností množín (jazykov) L_1 a L_2 sa robí pomocou dôkazu dvoch inklúzií $L_1 \subseteq L_2$ a $L_1 \supseteq L_2$, ktoré sa dokazujú ukázaním platnosti dvoch výrokov $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \Rightarrow w \in L_2$ a $\forall w \in \Sigma^* : w \in L_2 \Rightarrow w \in L_1$.

Dôkaz iba jednej inklúzie namiesto oboch

Neodôvodnené úpravy

Každú úpravu treba zdôvodniť (najlepšie komentárom rovno na tomto riadku).

Nesprávne použitie matematických symbolov

Napr. výraz typu $h(x)^* \Leftrightarrow h(x^*)$ je nesprávny, lebo $h(x)^*$ a $h(x^*)$ sú množiny a nie logické výroky (možno si to mýlite s konvenciou z predmetu Databázy, kde sa tradične zamieňajú množiny a príslušné charakteristické predikáty).

Tri bodky (. . .)

Výskyt tohto symbolu v dôkaze väčšinou znamená, že niekto odflákol dôkaz indukciou.

Neúplný rozbor prípadov

Častokrát ste zabudli rozobrať prípad, keď je skúmané slovo prázdne, skúmaný jazyk je prázdny alebo nekonečný (t.j. ste písali, že $L = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$).

Tiež často ste zabúdali, že skúmané slovo mohlo byt prázdne.

Hodnotenie

Zásada je, že odpoveď bez zdôvodnenia je za nula bodov.

Podúloha A: $h^{-1}(L^*) \stackrel{?}{=} h^{-1}(L)^*$

Udeľoval som 4 body za správny protipríklad s dôkladným odôvodnením (t.j. ak príklad bol správny, ale nevysvetlili ste, prečo je to tak, tak som dal nula bodov[1]).

Podúloha B: $h(L^*) \stackrel{?}{=} h(L)^*$

Udeľoval som 1 bod za správnu štruktúru dôkazu (dve inklúzie, zdôvodnenie úprav) a 2 body za správne odôvodnenie jednotlivých úprav.

Podúloha C: $h(L_1L_2) \stackrel{?}{=} h(L_1)h(L_2)$

Rovnako ako v podúlohe B.

[1]afaik sa to aj tak ani raz nestalo