Úvod do TI 2015

poznámky k príkladu 1.1

1a) (3b) Chybné riešenie $\binom{2n}{n} \cdot 2^n$ (–3b), chybné indexy v sume alebo chybné koeficienty v binomickom císle (–1b).

1b) (4b) Na rozdiel od správneho riešenia $2^{12} - 7 * 2^6 + 1$ najcastejšie zabudli na $+1$ (–1b).

1c) (3b) Buď to mali dobre alebo vôbec.

poznámky k príkladu 1.2

(autor: Askar Gafurov) Naznačím tu pár spôsobov ako vyriešiť domácu úlohu (nemá to slúžiť vzorom pre domáce úlohy).

Riešenie 1

Jedné rozumné riešenie je založené na takzvanom Bertrandovom volebnom probléme [1].

V krátkosti: nech máme dvoch kandidátov A a B, a kandidát A ziskal p hlasov a kandidát B ziskal q hlasov, pričom $p > q$. Nech všetky hlasovacie listky sú v krabici a ideme postupne vyhodnocovať výsledky volieb. Potom šanca, že A viedol v priebežnom hodnotení počas celého vyhodnocovania je $\frac{p-q}{p+q}$.

Tento poznátok vieme aplikovať na náš problém. Jednotky budú hlasy kandidáta A a nuly budú hlasy kandidáta B.

Ak máme k jednotiek, tak máme $2n-k$ núl. Potom šanca, že náhodne vybrané slovo dĺžky $2n$ nad abecedou $\{0,1\}$ je *nasytené*, je rovná $\frac{k-(2n-k)}{k+(2n-k)}$. A keďže počet všetkých slov dĺžky $2n$ s k jednotkami je $\binom{2n}{k}$, tak počet nasytených slov s k jednotkami je $\frac{k-(2n-k)}{k+(2n+k)}\binom{2n}{k}$.

A teda celkový počet nasytených slov dĺžky $2n$ je

$$F(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-(2n-k)}{k+(2n+k)} \binom{2n}{k}.$$

Poďme si ju vypočítať [2]:

[1] link na článok na Wikipédii: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_ballot_theorem`

[2] výpočet je trochu technický a neočakáva sa, že budete rozumieť, prečo volíme takéto kroky. Majú svoje opodstatnenie, ale podrobné spisovanie by zabralo príliš veľa času a miesta. Ak by vás to veľmi zaujalo, tak viem to ukázať naživo

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-(2n-k)}{k+(2n-k)}\binom{2n}{k} =$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2k-2n}{2n}\binom{2n}{k} =$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2k-2n}{2n}\binom{2n}{k} =$$

nech $i := k - n$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{2(n+i)-2n}{2n}\binom{2n}{n+i} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{2n}\binom{2n}{n+i} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\binom{2n}{n+i} =$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{2n}{n+i} =$$

teraz prichádza temná finta

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(n+i)\binom{2n}{n+i} - \sum_{i=1}^{n}(n)\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(n+i)\binom{2n}{n+i} - n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(n+i)\frac{(2n)!}{(2n-(n+i))!(n+i)!} - n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n)!}{(2n-(n+i))!(n+i-1)!} - n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-(n+i))!(n+i-1)!} - n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}2n\binom{2n-1}{n+i-1} - n\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\left(2n\frac{1}{2}2^{2n-1} - n\frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)\right) =$$

$$=\left(2\frac{1}{2}2^{2n-1} - \frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)\right) =$$

$$=2^{2n-1} - 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{n!n!} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2n}{n}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} =$$

Riešenie 2

Iná možnosť je rátať duálnu úlohu: koľko je zlých slov.

Ako vyzerá zlé slovo? nejaký čas je dobré, a potom je zlé. Čiže má tvar

$$1<\text{vývažené slovo dĺžky } 2k>0<\text{ľubovoľné slovo dĺžky } (2n-2)-2k>$$

alebo

$$0<\text{ľubovoľné slovo dĺžky } 2n-1>.$$

Vývažené slovo je vlastne dobre uzatvorkovaný výraz [3]. Z Wikipédie vieme, že počet vývažených slov dĺžky $2n$ je rovné n-tému Cathalanovému číslu[4] $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Potom počet všetkých zlých slov dĺžky $2n$ je

$$G(n) := 2^{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \; 2^{(2n-2)-2k}$$

A teda počet dobrých slov je

$$F(n) = 2^{2n} - G(n) = 2^{2n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \; 2^{(2n-2)-2k}$$

Bohužiaľ, vyrátať túto sumu je pomerne obtiažne.

Pokusíme sa:

$$\begin{aligned}
&2^{2n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \; 2^{(2n-2)-2k} = \\
=&2^{2n-1} - 2^{2n-2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k}} C_k = \\
=&2^{2n-1} - 2^{2n-2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \dots
\end{aligned}$$

poznámky k príkladu 1.3

Bodovanie: 4 body - ak bol rozumný dôkaz, že je to riešenie, 2 bod - ak ste dokázali minimálnu dĺžku a 4body za algoritmus (postup) ako slovo nájsť.

Najčastejšou chybou boli chýbajúci algoritmus na zostrojenie najkratšieho slova pre ľubovoľné n. Keď uvediete hľadané slovo pre $n = 2$ alebo 3 to nestačí. Správnosť vami navrhnutého algoritmu sa treba pokúsiť čo najformálnejšie zdôvodniť, prípadne aspoň uviesť argumenty prečo funguje. Logicky to vyšlo tak, nejako sa mi tak zdá, alebo vidíme z príkladu, že... do zdôvodnenia nepatria. Treba zdôvodniť, prečo váš algoritmus nájde slovo, ktoré obsahuje ako svoje podslová všetky slová dĺžky dva a tiež, že vytvorené slovo je najkratšie možné.

[3] množina dobrých uzatvorkovaní sa volá Dyckov jazyk (`https://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language`)

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number`