

Úlohy 1 (23.9.2015)

Termín: **1. október 2015**, na cvičeniach. Každý príklad píšete na samostatný papier A4! Nezabudnite sa podpísať a uviesť skupinu kam chodíte na cvičenia (meno cvičiaceho resp. čas cvičenia a miestnosť).

Vždy uveďte aj zdôvodnenie (dôkaz) vášho riešenia! (Nestačí len áno/nie alebo číslo.)

Opísané riešenia sú za 0b (aj opisované aj opísané, nebudeme zisťovať čo je originál).

Príklad 1. Koľko je slov nad abecedou $\{0, 1\}$ takých, že

- ich dĺžka je $2n$ a obsahujú aspoň n symbolov 0?
- ich dĺžka je 12 a neobsahujú podslovo 101100?

Majme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a nech pre jej symboly platí $a < b < c$. Koľko je slov x nad abecedou Σ takých, že

- ich dĺžka je 10, obsahujú práve dva rôzne symboly $s_1, s_2 \in \Sigma$, $s_1 < s_2$ a $|x|_{s_1} = |x|_{s_2}$? (Teda napríklad ak x obsahuje symboly a, b , je v x počet výskytov a rovnaký ako počet výskytov b .)

Príklad 2. Uvažujme slová nad abecedou $\{0, 1\}$, v ktorých platí pre ich každý prefix p , že $|p|_0 < |p|_1$. Napríklad, slová 1, 110, 1101 spĺňajú našu definíciu a slová 0, 10, 1001 ju nespĺňajú. Koľko je takýchto slov dĺžky

- 4
- 6
- $2n$, $n \in \mathbb{N}$

Poznámky: Úlohu môžete skúsiť naprogramovať. Koľko slov danej dĺžky nespĺňa našu definíciu?

Príklad 3. Máme abecedu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Nájdite najkratšie slovo, ktoré obsahuje každú dvojicu písmen ako podreťazec (a samozrejme dokážte, že vaša konštrukcia produkuje najkratšie slovo). Napr keby sme mali abecedu $\{1, 2, 3\}$, tak slovo musí obsahovať podreťazce 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Príklad 4. (riešte len ak vám predchádzajúce príklady boli príliš ľahké)
Majme abecedu Σ , $|\Sigma| = 26$. Uvažujme všetky slová nad Σ dĺžky presne 26. Váha slova w je $1/(k+1)$, kde k je počet rôznych písmen abecedy, ktoré sa nevyskytujú v slove w . Dokážte, že súčet váh všetkých 26^{26} slov je 3^{75} . (Poznámka ak by sme mali abecedu $\{a, b\}$, tak všetky slova dĺžky 2 sú aa, ab, ba a bb . Ich zodpovedajúce váhy sú $1/2, 1, 1$ a $1/2$ a súčet váh všetkých slov je 3. Príklad je z aktuálnej sady KMS)