Úvod do TI 2012

poznámky k príkladu 2.1

Často vyskytujúcou sa chybou vo všetkých podúlohách bolo, že ste nevedeli čo presne robí Kleeneho uzáver (iterácia, *). Kleeneho uzáver je definovaný ako $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$. V prípade, že tomuto zápisu nerozumiete, konzultuje ho so svojím cvičiacim.

Podúloha a) bola za 4 body (2 za každú inklúziu). Častou chybou pri dôkaze bolo, že ste neuvažovali ľubovoľný homomorfizmus a ľubovoľný jazyk, ale ukázali ste, že tvrdenie platí pre konkrétny jeden jazyk a jeden homomorfizmus.

Podúloha b), v ktorej bolo treba tvrdenie vyvrátiť, bola za 2 body. S touto časťou ste väčšinou nemali problémy.

Podúloha c) bola takisto za 4 body (2 za každú inklúziu dôkazu). Najčastejšie vyskytujúcou sa chybou bolo dokazovanie tvrdenia pre konkrétne dva jazyky a nie všeobecne.

poznámky k príkladu 2.2

Body za podúlohy boli rozdelené postupne na 3, 3 a 4. V časti a) a b) bolo treba tvrdenia vyvrátiť protipríkladom. V časti a) fungoval veľmi jednoduchý protipríklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$. V časti b) bolo treba vymyslieť také disjunktné jazyky, ktorých druhé mocniny nie sú disjunktné. Najťažšia časť c) bola hodnotená štyrmi bodmi a dopadla najhoršie. Preto uvedieme vzorový dôkaz. Odporúčame si ho prečítať každému a skúsiť písať podobné dôkazy v domácich úlohách (a písomkách).

Rovnosti množín sa dokazujú spravidla dokázaním dvoch inklúzií. Začneme teda inklúziou $L_1(L_2 \cap L_3) \subseteq L_1L_2 \cap L_1L_3$. To, že množina na ľavej strane je podmnožinou množiny na pravej strane môžeme dokázať (a vo väčšine príkladov na tomto predmete dokazujeme) tým, že pre **ľubovoľné** slovo[1] z ľavej strany ukážeme, že patrí aj do množiny na pravej strane. Nech teda $w \in L_1(L_2 \cap L_3)$. To znamená, že $w = uv$, kde $u \in L_1$ a $v \in L_2 \cap L_3$. Keď si lepšie uvedomíme čo znamená $v \in L_2 \cap L_3$, vidíme, že $v \in L_2$ a zároveň $v \in L_3$ (definícia prieniku). Preto $uv \in L_1L_2$ a $uv \in L_1L_3$. (Definícia zreťazenia) Keďže uv patrí do oboch množín, patrí aj do ich prieniku, a teda $uv = w \in L_1L_2 \cap L_1L_3$, čo sme chceli dokázať.

Opačná inklúzia je o malý detail komplikovanejšia (ak máte za úlohu o polboda menej, pravdepodobne ste zabudli na presne tento detail). Predpokladajme, že $w \in L_1L_2 \cap L_1L_3$. Mnohí z vás v tomto kroku prehlásili, že $w = uv$, kde $u \in L_1$ a $v \in L_2$, $v \in L_3$, to ale nie je úplne zrejmé. To čo zrejmé je, je nasledovné: $w = uv = u'v'$, $u \in L_1$, $v \in L_2$, $u' \in L_1$, $v' \in L_3$. Potrebujeme ukázať, že $u = v$ a $u' = v'$. Tu nám príde na pomoc podmienka zo zadania $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Ak by totiž $u \neq u'$, tak dlhšie zo slov u, u' končí znakom, ktorý je na začiatku zodpovedajúceho v, v'. To už je ale spor, pretože $u, u' \in \Sigma_1^*$ a $v, v' \in \Sigma_2^*$ a $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Preto naozaj platí $u \in L_1$, $v \in L_2$, $v' = v \in L_3$. Podobným postupom ako v predchádzajúcej časti dostávame $v \in (L_2 \cap L_3)$, $uv = w \in L_1(L_2 \cap L_3)$, čo sme chceli dokázať.

[1] rozumej ľubovoľné ako každé, nie ako že si vyberieš ľubovoľné slovo a na tom to ukážeš

poznámky k príkladu 2.3

Za správne predpisy funkcií boli po dva body, za dôkazy jednoznačnosti po tri body. Dôkaz jednoznačnosti robil málokto z vás, preto bolo za úlohu tak málo bodov. Za predpis funkcie, ktorej oborom hodnôt je nekonečná množina, sa nepovažuje tabuľka pre prvých niekoľko prvkov.