ÚVOD DO TI 2011

poznámky k príkladu 4.1

1. Modulárnu konštrukciu a správne rozdelenie jazyka L na jazyky L_1 a L_2 zvládol asi každý z Vás. S jazykom $L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \bmod 2 = 0\}$, konštrukciou automatu, tried $KL[q_0]$ a $KL[q_1]$ a dôkazom správnosti tiež väčšinou nebol problém, asi každý kto vôbec začal (konštruovať automat, triedy, dôkaz) to zvládol. Horšie to bolo s jazykom $L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ obsahuje podslovo } 0101\}$. Najviac problémov bolo s triedami KL, preto si ich tu rozoberieme. Keďže každý z Vás skonštruoval rovnaký (minimálny) automat pre jazyk L_1, nebudeme ho tu popisovať. S triedou $KL[q_4]$ nebol problém, kedže tento stav bol jediný akceptačný a preto $KL[q_4] = L_1$. Mnoho z Vás správne tušilo, že trieda $KL[q_i]$ bude mať niečo spoločné s i-tym prefixom slova 0101 (ratajúc λ ako nultý prefix). Slová, ktoré končia v stave q_i budú **končiť** i-tym prefixom. (Pozor, nie obsahovať i-ty prefix ako podslovo.) Navyše však tieto slová nesmú obsahovať celé podslovo 0101 ani končiť prefixom dlhším ako je i-ty prefix. Správne triedy formálne zapísané vyzerajú takto: (toto nie je jediný správny zápis)

$$\begin{aligned}
KL[q_0] &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x, y \in \{0,1\}^*, w \neq x0101y, w \neq x0, w \neq x01, w \neq 010\}\\
KL[q_1] &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists z \in \{0,1\}^*, \forall x, y, v \in \{0,1\}^*, w = z0, w \neq x0101y, z \neq v01\}\\
KL[q_2] &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists z \in \{0,1\}^*, \forall x, y \in \{0,1\}^*, w = z01, w \neq x0101y\}\\
KL[q_3] &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists z \in \{0,1\}^*, \forall x, y\, in \{0,1\}^*, w = z010, w \neq x0101y\}\\
KL[q_4] &= L_1
\end{aligned}$$

poznámky k príkladu 4.2

poznámky k príkladu 4.3

Keďže úloha nedopadla najlepšie, uvedieme vzorové riešenie.
a) Na dôkaz použijeme pumpovaciu lemu. Dokazujeme sporom, preto predpokladáme, že daný jazyk je regulárny a teda existuje konštanta n_0 zo znenia pumpovacej lemy. Vyberieme si slovo $w = 0^{n_0}1^{2n_0}0^{3n_0}$. Zjavne $|w| \geq n_0$, preto sa musí dať rozdeliť na tri časti, $w = yxz$ tak, aby platili podmienky pumpovacej lemy.

Prvá podmienka hovorí, že $|yx| \leq n_0$. Z toho vyplýva, že slová x a y pozostávajú len zo samých núl. Môžeme preto napísať, že $x = 0^m$, $y = 0^l$ pre nejaké $m, l \in \mathbb{N}$. Navyše z druhej podmienky vyplýva, že $m > 0$, pretože $|x| = |0^m| > 0$. Podľa tretej podmienky musí buď $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$. (Alebo $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$, táto možnosť nenastáva, pretože $yx^1z = w \in L$.) To však neplatí, pretože $yx^0z = 0^{n_0-m}1^{2n_0}0^{3n_0} \notin L$. Prišli sme k sporu, preto nemôže platiť náš pôvodný predpoklad a síce, že zadaný jazyk je regulárny.
b) Na dôkaz tejto časti použijeme lemu 3.12. Sporom predpokladajme, že existuje trojstavový automat M akceptujúci zadaný jazyk. Všimneme si slová λ, a, aa, aab. Z dirichletovho princípu vyplýva, že automat M skončí pri čítaní nejakých dvoch slov v rovnakom stave. (Máme 4 slová a 3 stavy.) Formálne existujú slová $u, v \in \{\lambda, a, aa, aab\}$ také, že $\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$. Na dosiahnutie sporu nám podľa lemy 3.12 stačí overiť, že pre každú dvojicu slov existuje z také, že $uz \notin L$ a $vz \in L$. (Alebo

naopak.) bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|u| < |v|$. Vezmime z také, že $vz = aaba$. Potom $vz = aaba \in L$, ale $uz \notin L$, pretože $|uz| \leq 3$ a dĺžka každého slova z L je aspoň 4.

Poznámky: Indexy sa zvyknú značiť písmenami približne zo stredu abecedy, napr. $i, j, k, \ldots$. Neznamená to, že nemôžete použiť nič iné, no stromček, bodka, srdiečko sú už trošku pritiahnuté za vlasy. Neprípustné je však používať symboly ktoré majú štandardne iný význam, ako napríklad ∞ alebo $\emptyset$.

Niektorí z Vás v časti b) najprv skonštruovali automat so šiestimi stavmi a potom argumentovali, že sa žiadne dva stavy nedajú spojiť. Tým však nedokážete, že ak si zvolíme iný automat, nebudú sa dať spojiť stavy ani v ňom. Nespojiteľnosť stavov treba ukázať nezávisle od automatu (napríklad tak, ako je to spravené vo vzorovom riešení vyššie).