Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 9.1

a) Princíp fungovania (deterministického) TS bude veľmi jednoduchý. Budeme striedavo škrtať áčka zo začiatku a béčka z konca. Ak vyškrtáme jeden druh písmen, zistíme, či sme vyškrtali aj druhý a ak áno, akceptujeme. Napíšeme si prechodovú funkciu naášho TS. (počiatočný stav je q_P akceptačný q_A a zamietaci q_N)

$$
\begin{aligned}
\delta(q_P, \cent) &= (q_0, \cent, 1)\\
\delta(q_0, a) &= (q_1, \mathbf{a}, 1)\\
\delta(q_0, \mathbf{b}) &= (q_A, \mathbf{b}, 0)\\
\delta(q_0, \sqcup) &= (q_A, \sqcup, 0)\\
\delta(q_1, a) &= (q_1, a, 1)\\
\delta(q_1, b) &= (q_1, b, 1)\\
\delta(q_1, \sqcup) &= (q_2, \sqcup, -1)\\
\delta(q_1, \mathbf{b}) &= (q_2, \mathbf{b}, -1)\\
\delta(q_2, b) &= (q_3, \mathbf{b}, -1)\\
\delta(q_3, b) &= (q_3, b, -1)\\
\delta(q_3, a) &= (q_3, a, -1)\\
\delta(q_3, \mathbf{a}) &= (q_0, \mathbf{a}, 1)
\end{aligned}
$$

b) Podobne ako v prípade a) aj tu budeme škrtať písmená striedavo zo začiatku a konca, ak dôjdeme na mriežku, overíme, že sme vyškrtali všetko. (počiatočný stav je q_P akceptačný q_A a zamietaci q_N)

$$
\begin{aligned}
\delta(q_P, \cent) &= (q_0, \cent, 1)\\
\delta(q_0, 0) &= (q_{1,0}, x, 1)\\
\delta(q_0, 1) &= (q_{1,1}, x, 1)\\
\delta(q_0, \#) &= (q_4, \#, 1)\\
\delta(q_{1,0}, c) &= (q_{1,0}, c, 1), \quad c \in \{0, 1, \#\}\\
\delta(q_{1,0}, x) &= (q_{2,0}, x, -1)\\
\delta(q_{1,0}, \sqcup) &= (q_{2,0}, \sqcup, -1)\\
\delta(q_{2,0}, 0) &= (q_3, x, -1)\\
\delta(q_{1,1}, c) &= (q_{1,1}, c, 1), \quad c \in \{0, 1, \#\}\\
\delta(q_{1,1}, x) &= (q_{2,1}, x, -1)\\
\delta(q_{1,1}, \sqcup) &= (q_{2,1}, \sqcup, -1)\\
\delta(q_{2,1}, 1) &= (q_3, x, -1)\\
\delta(q_3, c) &= (q_c, c, -1), \quad c \in \{0, 1, \#\}\\
\delta(q_3, x) &= (q_0, x, 1)\\
\delta(q_4, \sqcup) &= (q_A, \sqcup, 0)\\
\delta(q_4, x) &= (q_A, x, 0)
\end{aligned}
$$

Vzorové riešenie úlohy 9.2

Riešenie

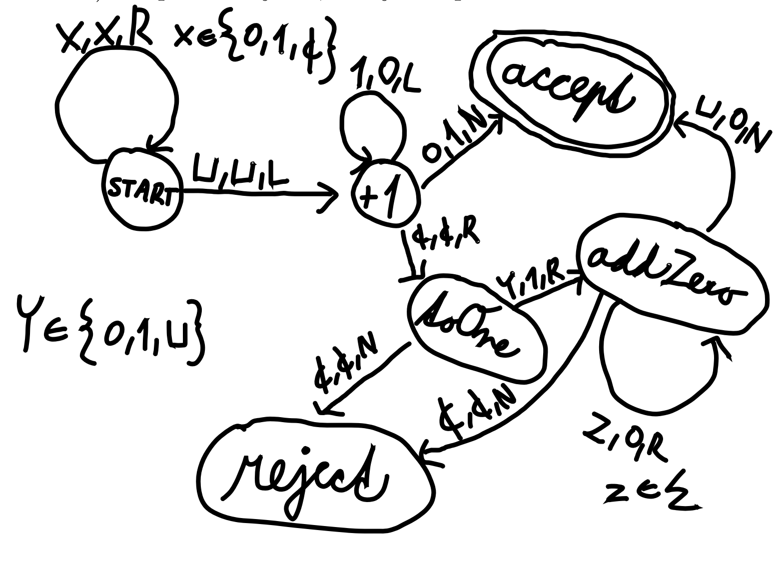
Predpokladáme, že vstup je kódovaný v binárnej sústave. TS bude simulovať pripočítanie jednotky v dvojkovej sústave tak, ako sa učí sčítavanie na základnej škole. Teda najskôr k poslednej cifre pripočíta jedna. Ak nám niečo pretieklo, pripočítame to k druhej predposlednej cifre. Ak aj tam niečo pretieklo, pripočítame to k predchádzajúcej cifre. Takto pokračujeme, až kým nenájdeme 0, ktorú zmeníme na 1 (a skončili sme), alebo kým nedôjdeme na začiatok vstupu a potom pred vstup potrebujeme pridať jednu jednotku. Prepísať ľavú hranicu pásky nemôžeme, preto musíme posunúť pásku o jedna vpravo a na začiatok zapísať jedna (ale ani toto netreba spraviť. Ak sa totiž dostaneme na začiatok pásky, tak to znamená, že sme celú pásku vynulovali, preto na začiatok slova zapíšeme 1 a na koniec slova pridáme 0).

Toto vieme naprogramovať pomocou 6 stavov: $Q = \{start, +1, toOne, addZero, accept, reject\}$. Spravíme nasledovný TS $M = (Q, \Sigma, \Sigma \cup \{\sqcup, ¢\}, start, \delta, accept, reject)$ (ak máme na vstupe prázdne slovo λ, tak to interpretujeme ako 0). Rovnako nám nebude vadiť, ak číslo na vstupe začína nulami.

δ funkcia vyzerá nasledovne (zmysluplné stavy):

$$\begin{aligned}
\delta(start, x) &= (start, x, R), x \in \{0, 1, ¢\} \\
\delta(start, \sqcup) &= (+1, \sqcup, L) \\
\delta(+1, 1) &= (+1, 0, L), \delta(+1, 0) = (accept, 1, N), \delta(+1, ¢) = (toOne, ¢, R) \\
\delta(toOne, 0) &= (addZero, 1, R) \\
\delta(addZero, 0) &= (addZero, 0, R) \\
\delta(addZero, \sqcup) &= (accept, 0, N)
\end{aligned}$$

δ funkcia nie je definovaná úplne (niektoré sme ešte nedefinovali). Prakticky to nevadí, lebo takto definovaný TS sa nikdy „nezasekne”, lebo nedefinované prechody nemôžu nastať. Aby sme mali definíciu úplne správne, tak ostatné prechody môžeme definovať ľubovoľne (lebo nikdy nenastanú). Napríklad aj tak, ako je to spravené na nasledovnom obrázku:



Vzorové riešenia úlohy 9.3

Na to aby sme dokázali, že je jazyk regulárny nám stačí ukázať, že existuje konečný automat (deterministický alebo nedeterministický), ktorý ho akceptuje. Automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, ktorý akceptuje jazyk L_R môže vyzerať napríklad takto:

$$Q = \{q_i \mid i \in \Sigma\} \cup \{q_0\}$$

$$F = Q - \{q_0\}$$

$$(a, b) \in R : \delta(q_a, b) = q_b$$

$$c \in \Sigma : \delta(q_0, c) = q_c$$

Teraz ešte treba dokázať, že automat naozaj akceptuje jazyk L_R. Toto dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku slova k. Pre $k = 1$ automat akceptuje všetky slová. Takisto všetky slová jednotkovej dĺžky patria do jazyka. Nech $L_R = L(M)$ platí pre $k = n$. Majme slovo w dĺžky n. Ak $w \in L(M)$, tak sa nachádza v niektorom akceptačnom stave, teda v ľubovoľnom stave okrem q_0. Ak $(w_n, w_{n+1}) \in R$, tak po prečítaní w_{n+1} sa automat dostane do akceptačného stavu. Ak $(w_n, w_{n+1}) \notin R$, tak sa automat zasekne. Ak $w \notin L(M)$, tak sa automat zasekol alebo je v stave q_0. V stave q_0 môže byť len ak $n = 0$, teda musí byť zaseknutý. V takom prípade sa už do akceptačného stavu nedostane. Tade vlastnosť $L_R = L(M)$ platí aj pre slová dĺžky $n + 1$.

Časté chyby Niektorý ste si pamätali dĺžku slova v stave. To sa nedá, lebo dĺžka slova nemusí byť konečná, ale počet stavov áno. Niektorý ste dokazovali, že sa dá zostrojiť konečný automat indukciou. V indukčnom kroku ste pridávali konečný počet stavov, ale to ešte neznamená, že celkový počet stavov bude konečný. Nekonečne veľakrát konečný počet je nekonečný počet.