Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 8.1

Vzorové riešenia úlohy 8.2

Na začiatku si povieme, že L neobsahuje prázdne slovo. Ak by prázdne slovo obsahoval, treba vyriešiť niekoľko detailov pri odstraňovaní λ-prechodov. Za tento prípad sa však nestrhávali body. (To neznamená, že sa za takéto veci nebudú strhávať body na písomke!) K prípadu, keď $\lambda \in L$ sa vrátime neskôr.

Keďže L je regulárny, existuje konečný automat M ktorý ho akceptuje. Vytvoríme automat M' nasledovne: pridáme nové prechody do prechodovej funkcie, ak $\delta(q, a) \ni p$, kde $p \in F$, tak $\delta'(q, a) = \delta(q, a) \cup q_F$. Kde q_F je nový stav a zároveň jediný akceptačný. Automat M' teda akceptuje ľubovoľné slovo, ktoré akceptuje L, pretože ak existoval výpočet v automate M, tak namiesto posledného prechodu zo stavu q do akceptačného stavu p prejdeme do stavu q_F a tým pádom akceptujeme aj v automate M'. Opačne, ak akceptujeme slovo v M', tak sme museli nutne v poslednom kroku prejsť z nejakého stavu q na písmeno x do stavu q_F, čo je možné len vtedy, ak v pôvodnom automate existoval rovnaké prechod do stavu $p \in F$.

Keď už máme automat M', ktorý má len jeden akceptačný stav, môžeme zostrojiť automat $M'' = (K', \Sigma, \delta'', q_F, \{q_0\})$, kde $\delta''(q, x) \ni p \iff \delta'(p, x) \ni q$. (Otočíme šípky.) Ľahko sa ukáže, že ak je slovo w z L, tak má akceptačný výpočet v M', ktorého otočením dostávame akceptačný výpočet M'' pre slovo w^R. (Rozmyslite si, len takto by to ako dôkaz nestačilo.) Tiež opačne, ak máme akceptačný výpočet pre slovo w^R v M'' tak vieme nájsť akceptačný výpočet pre slovo w v M'. (Podobne, rozmyslite si prečo.)

Na záver sa ešte vráťme k L obsahujúcemu prázdne slovo. V tom prípade naša konštrukcia automatu M' nebude fungovať, pretože počiatočný stav je akceptačný, prvotnú šípku v delta funkcii nemáme ako rozmnožiť na dve šípky (druhá by ukazovala priamo na q_F). Preto použijeme nasledovnú myšlienku: $L = (L - \{\lambda\}) \cup \{\lambda\}$. Zostrojíme automat M_1 pre $L - \{\lambda\}$, k nemu automat M_1' tak ako je popísané vyššie. Navyše mu nedovolíme vrátiť sa do počiatočného stavu: ak by existoval prechod do q_0 tak ho pošleme do nového stavu q_0', z ktorého je prechodová funkcia definovaná rovnako ako z q_0, ale tento stav nie je počiatočný. Potom zostrojíme M_1'', ktorý bude akceptovať $(L - \{\lambda\})^R = L^R - \{\lambda\}$. Teraz už len pridáme q_0 medzi akceptačné stavy, čím akceptujeme aj prázdne slovo a nič navyše, pretože do q_0 sa nedá vrátiť.

Hodnotenie, poznámky Mnohí z Vás správne zostrojili konečný automat, používali ste však λ-prechody, ktoré neboli na prednáške povolené a trebalo ich odstrániť. Niektorí tiež neukazovali ani to, že definovaný automat naozaj generuje jazyk L^R.

Niektorí ste použili pumpovaciu lemu na to, aby ste ukázali, že jazyk je regulárny. Tu si treba dať pozor, pretože pomocou pumpovacej lemy vieme ukázať len to, že nejaký jazyk nie je regulárny – existuje totiž neregulárny jazyk, ktorý spĺňa podmienky pumpovacej lemy, t.j. dá sa napumpovať. Tým, že o jazyku ukážete, že sa dá napumpovať, ešte nedokážete, že je regulárny.

Vzorové riešenie úlohy 8.3

Automat zostrojíme podľa dôkazu vety 3.26.

stav	a	b	c
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\{2,4\}$	$\{4\}$	$\emptyset$
$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{2,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\emptyset$
$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{3,4\}$	$\emptyset$
$\{3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,4\}$	$\emptyset$
$\{1,4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2\}$
$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2\}$
$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\emptyset$
$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2\}$
$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{2\}$
$\{1,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4\}$	$\{2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Množiny v tabuľke chápeme ako označenia stavov. DKA zostrojený k NKA s n stavmi podľa vety 3.26 môže mať najviac 2^n stavov, pretože neexistuje viac podmnožín n-prvkovej množiny. V tomto prípade budú potrebné všetky stavy, teda počet stavov DKA bude 2^n, ak počet stavov nedeterministického automatu je n.

Potrebujeme dokázať, že všetky stavy sú dosiahnuteľné. Stavy označené jednoprvkovou množinou sú zjavne dosiahnuteľné ak budeme čítať len b. Teraz ukážeme matematickou indukciou vzhľadom na velkosť množiny, ktorá označuje stav, že sú dosiahnuteľné všetky stavy. Nech n je počet stavov NKA. Majme i-ticu $\{s_1, s_2, ..., s_i\}$. Ak v tejto i-tici nie je 2, tak prechodom na a v DKA dostaneme i+1-ticu $\{2, s_1+1, s_2+1, ..., (s_i+1)\ mod\ n\}$. Ďalej k prechodmi na b dostaneme i+1-ticu $\{(2+k)\ mod\ n, (s_1+k+1)\ mod\ n, (s_2+k+1)\ mod\ n, ..., (s_i+k+1)\ mod\ n\}$. Použitím všetkých i-tic a predchádzajúceho postupu dostaneme všetky i+1-tice. Do prázdneho stavu sa dotaneme prechodom na c z ľubovoľného stavu neobsahujúceho 1. Teda všetky stavy sú dosiahnuteľné.

Časté chyby: Často ste zabúdali pri konštrukcii DKA definovať prechodové funkcie pre c. Vyskytli sa dôkazy matematickou indukciou na počet stavov. Tvrdili ste, že pridaním jedného stavu pribudnú dve hrany do grafu NKA. To je pravda. Ale potom ste na základe toho tvrdili, že sa tým zvýši počet stavov dvojnásobne. Toto už pravda nemusí byť.