Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 7.1

Bodovanie + nedostatky Tento príklad sa hodnotil dosť obtiažne, keďže v zadaní sa omylom vyžadovali veci, ktoré sa prebrali až neskôr a nemuseli ste ich vedieť. Na druhej strane sme chceli odmeniť tých, ktorí si dali námahu a úlohu s pomocou čohokoľvek vyriešili. Preto sa všetky body za tento príklad rátajú ako bonusové. Väčšina bodov, ktorá sa stratila, bola za chýbajúci dôkaz nedeterministického automatu.

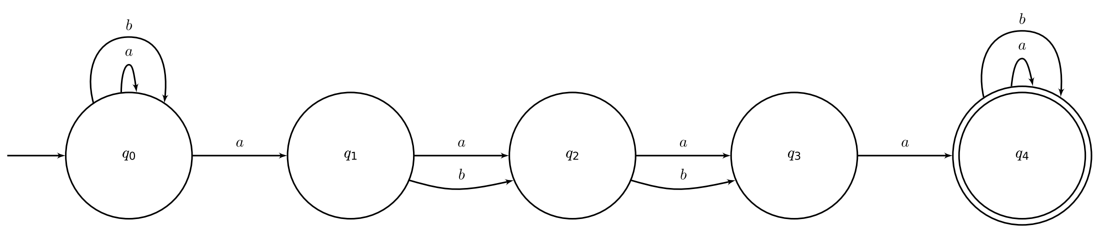
Za podčasť a) sa dalo získať 5 bodov. Tie sa delili na dva body za konštrukciu a tri body za dôkaz správnosti. Dôkaz sme síce ešte na prednáške nemali, avšak v tejto úlohe sa za neho udeľovali body (navyše bol relatívne jednoduchý).

Za podčasť b) sa dalo získať rovnako 5 bodov. Ak ste použili presne množinovú konštrukciu, stačilo skonštruovať deterministický automat bez dôkazu jeho správnosti. Ak ste sa ale od konštrukcie odklonili, prípadne automat skonštruovali úplne podľa seba, bolo treba nový automat dokázať (alebo aspoň za menej bodov odôvodniť) jeho správnosť.

Vzorové riešenie Našou prvou úlohou je skonštruovať nedeterministický konečný automat pre jazyk

$$L = \{xauvaz \mid x, z \in \{a,b\}^*, u, v \in \{a,b\}\}$$

Inými slovami, máme akceptovať jazyk všetkých slov, ktoré majú v sebe dva znaky a, medzi ktorými sú práve dve písmená. Náš nedeterministický automat bude $A_1 = (K, \{a,b\}, \delta_1, q_0, \{q_4\})$, kde $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ a δ_1 vidno z obrázka:



Dokážme, že $L = L(A_1)$. Budeme postupovať dôkazom dvoch inklúzií.

$\underline{L \subseteq L(A_1)}$. Inými slovami, máme ukázať, že pre každé slovo z jazyka L existuje akceptačný výpočet. Z δ_1 vidíme, že pre každé slovo $x \in \{a,b\}^*$ platí $q_0 \in \hat{\delta_1}(q_0, x), q_4 \in \hat{\delta_1}(q_4, x)$. Ďalej vidíme, že ak $u \in \{a,b\}$, tak $q_2 \in \delta_1(q_1, u)$ a $q_3 \in \delta_1(q_2, u)$ a tiež $q_1 \in \delta_1(q_0, a)$ a $q_4 \in \delta_1(q_3, a)$.

Ak $w \in L$, potom $w = xauvay$ pre nejaké $u, v \in \{a,b\}$ a nejaké $x, y \in \{a,b\}^*$. Preto existuje akceptačný výpočet:

$(q_0, xauvay) \vdash^* (q_0, auvay) \vdash (q_1, uvay) \vdash (q_2, vay) \vdash (q_3, ay) \vdash (q_4, y) \vdash^* (q_4, \lambda)$.

Dokázali sme, že $w \in L(A_1)$.

$\underline{L(A_1) \subseteq L}$. Inými slovami, potrebujeme ukázať, že každé slovo, ktoré automat akceptuje, patrí do L. Nech $w \in L(A_1)$. Potom existuje akceptačný výpočet na tomto slove. Keďže automat má len jediný akceptačný stav, musí tento výpočet vyzerať takto:

$(q_0, w) \vdash^* (q_4, \lambda)$.

Vidíme, že jediná cesta z q_0 do q_4 je postupne cez stavy q_0, q_1, q_2, q_3, q_4. Ďalej z δ_1 vidno, že $\forall q \in \{q_1, q_2, q_3\}, \forall u \in \{a,b\} : q \notin (q, u)$. Ľudskými slovami, keď sme v niektorom zo stavov q_1, q_2, q_3, potom po prečítaní písmena musíme tento stav opustiť. Ďalej je fakt, že akonáhle prídeme do stavu q_4, už v ňom ostaneme a akonáhle opustíme stav q_0, už sa do neho nemôžeme vrátiť. Keď to dáme dokopy, vidíme, že výpočet musel pre nejaké $w_1, w_2 \in \{a,b\}^*$ a nejaké $u, v, x, y \in \{a,b\}$ vyzerať takto:

$(q_0, w_1uvxyw_2) \vdash^* (q_0, uvxyw_2) \vdash (q_1, vxyw_2) \vdash (q_2, xyw_2) \vdash (q_3, yw_2) \vdash (q_4, w_2) \vdash^* (q_4, \lambda)$.

Posledným krokom dôkazu je pozorovanie, že z q_0 do q_1 a z q_3 do q_4 sme mohli ísť iba na písmeno a. Preto $u = y = a$. Dostávame, že $w = w_1avxaw_2$, a preto $w \in L$.

V druhej časti úlohy sme mali prerobiť množinovou konštrukciou tento automat na deterministický. V tejto konštrukcii si v stave deterministického automatu sledujeme, v ktorých stavoch sa mohol nachádzať pôvodný automat. Náš automat bude $A_2 = (P(K), \{a, b\}, \delta_2, \langle\{q_0\}\rangle, F_2)$.

Množina jeho stavov je teda potenčná množina množiny stavov pôvodného nedeterministického automatu. Pre každú podmnožinu K teda vytvoríme stav. Ak uvažujeme ľubovoľnú množinu $R \in P(K)$, tak stav automatu A_2 zodpovedajúci množine R budeme, podobne ako v knihe, značiť $\langle R\rangle$.

Všeobecný postup, ako vytvoriť δ funkciu: nech $Q \in P(K), a \in \Sigma$. Potom $\delta_2(\langle Q\rangle, a) = \langle \cup_{q\in Q}\delta_1(q, a)\rangle$. Slovne povedané, stav po prechode na a zodpovedá množine stavov, v ktorých sa mohol nachádzať pôvodný automat, ak sa predtým nachádzal v niektorom zo stavov z Q a prečítal a.

Ešte treba určiť akceptačné stavy. Sú to všetky tie množiny, v ktorých sa nachádza nejaký akceptačný stav pôvodného automatu. Keďže jediný akceptačný stav pôvodného automatu bol q_4, potom môžeme formálne zapísať:

$$F_2 = \{\langle Q\rangle \mid Q \cap \{q_4\} \neq \emptyset\} = \{\langle Q\rangle \mid q_4 \in Q\}$$

.

Prechodová funkcia automatu A_2 je zachytená v tabuľke:

	a	b
$\langle\{q_0\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1\}\rangle$	$\langle\{q_0\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_2\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_3\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_2\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_3\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_3\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_2, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_3\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_3\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_3, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_3, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_1, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_2, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_2, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_3, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_2, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_3, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_3, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_4\}\rangle$
$\langle\{q_0, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_1, q_4\}\rangle$	$\langle\{q_0, q_4\}\rangle$

V tabuľke sa nenachádza všetkých prípustných 32 stavov, ale len dosiahnuteľných 16. Samozrejme, δ_2 by sa mohla definovať aj pre zvyšné stavy, ale keďže sa do nich nedokážeme dostať, tak ich odobraním z automatu nezmeníme jazyk, ktorý tento automat akceptuje. Napokon ešte pre úplnosť uveďme množinu akceptačných stavov:

$F_2 = \{\langle\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_1, q_3, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_1, q_2, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_1, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_2, q_3, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_2, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_3, q_4\}\rangle, \langle\{q_0, q_4\}\rangle\}$.

Vzorové riešenia úlohy 7.2

a)

Rovnosť neplatí. Asi najjednoduchšie si bolo uvedomiť, že ľavá strana obsahuje prázdne slovo λ a pravá strana nie, pretože všetky slová na pravej strane majú prefix 011.

Pre tých, ktorí majú radi úpravy výrazov sa na to dalo prísť aj na základe definície takto: Jazyk zodpovedajúci ľavej strane je $L((011 + (01)^* + 0)^*) = (L(011 + (01)^* + 0))^* = (L(011) \cup L((01)^*) \cup L(0))^* = (\{011\} \cup \{01\}^* \cup \{0\})^* = \{\lambda, 0, 011, (01)^i\}^*$, pre $i \in N$.

Na pravej strane je jazyk $L(011(011 + (10)^*1 + 0)^*) = L(011)L((011 + (10)^*1 + 0)^*) = \{011\}L((011 + (10)^*1 + 0)^*) = \{011\}(L(011) \cup L((10)^*1) \cup L(0))^* = \{011\}(\{0, 011\} \cup \{10\}^*\{1\})^* = \{011\}\{\lambda, 0, 011, (10)^j 1\}^*$, pre $j \in N$.

A teraz už je ľahko vidieť, že slová na ľavej strane nemusia mať prefix 011 a na pravej strane ho mať musia.

b)

Rovnosť neplatí. Na ľavej strane sú aj slová, ktoré obsahujú podslovo 100 iba raz a na pravej strane ho musia obsahovať aspoň dva krát.

Alebo znova úpravy podľa definície. Ľavá strana $L(((1+0)^*100(1+0)^*)^*) = (L((1+0)^*)L(100)L((1+0)^*))^* = ((L(1+0))^*100(L(1+0))^*)^* = (\{0,1\}^*100\{0,1\}^*)^*$.

Jazyk na pravej strane je $L(((1+0)100(1+0)^*100)^*) = (L((1+0)100(1+0)^*100))^* = (L(1+0)100(L(1+0))^*100)^* = (\{0,1\}100\{0,1\}^*100)^*$.

Vzorové riešenie úlohy 7.3

Presne podľa návodu.