Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 4.1

Bodovanie

Dôvod prečo veľa z Vás malo málo bodov bolo to, že ste sa nepokúsili svoje tvrdenia dokázať, pričom to je veľmi dôležitá súčasť úlohy. Body sa udeľovali nasledovne:

- 2 body za správne definovaný konečný automat (či už nakreslený, alebo definovaný pomocou množín a δ funkcie)
- 3 body som dával za správne definované množiny $Kl[q_i]$
- Bonus 1 bod som udeľoval ak niekto formálne definoval správne skoro všetky množiny $Kl[q_i]$ (jedna z množím mohla byť chybná)
- 5 bodov som dával za správny dôkaz

Uvedené počty bodov boli maximálne, ak sa niekde vyskytla chyba, tak sa body strhávali.

Riešenie

Automat

Vzorový automat $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{Q_F\})$ má 5 stavov $Q = \{q_0, q_c, q_{ca}, q_{cac}, q_F\}$. Jeho delta funkcia je nasledovná:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, x) &= q_0, x \in \{a, b\} \\
\delta(q_0, c) &= q_c \\
\delta(q_c, a) &= q_{ca} \\
\delta(q_c, b) &= q_0 \\
\delta(q_c, c) &= q_c \\
\delta(q_{ca}, a) &= q_0 \\
\delta(q_{ca}, b) &= q_0 \\
\delta(q_{ca}, c) &= q_{cac} \\
\delta(q_{cac}, a) &= q_{ca} \text{ POZOR! Toto mala väčšina zle!} \\
\delta(q_{cac}, b) &= q_F \\
\delta(q_{cac}, c) &= q_c \\
\delta(q_F, x) &= q_F, x \in \{a, b, c\}
\end{aligned}
$$

Všimnite si označený riadok. Veľa z Vás totiž spravilo taký automat, ktorý načítal *cac* a potom keď mal na vstupe a tak šiel do počiatočného stavu. To je zle, lebo ak po *cac* príde a, tak to znamená, že reťazec končí na *ca* a teda chceme byť v stave q_{ca}.

Množiny $Kl[q_i]$

Teraz uvediem niekoľko správnych definícii (za ľubovoľnú z nich by ste dostali plný počet bodov). Potom uvediem niektoré nesprávne riešenia tejto podúlohy a vysvetlím čo je na nich zle.

Správne: Prvé riešenie za 3 body.

$$\begin{aligned} KL[q_0] = L &= \{u|u \text{ neobsahuje cacb a nemá sufix c alebo ca}\} \\ KL[q_c] &= \{u|u \text{ neobsahuje cacb a má sufix c a nemá sufix cac}\} \\ KL[q_{ca}] &= \{u|u \text{ neobsahuje cacb a má sufix ca}\} \\ KL[q_{cac}] &= \{u|u \text{ neobsahuje cacb a má sufix cac}\} \\ KL[q_F] &= \{u|u \text{ obsahuje cacb}\} \end{aligned}$$

Iné riešenie za 4 body (3 body za správnosť + bonus).

$$\begin{aligned} Kl[q_F] = L &= \{u|u = xcacby, x, y \in \Sigma^*\} \\ Kl[q_{cac}] &= \{ucac|u \in \Sigma^*, u \notin L\} \\ Kl[q_{ca}] &= \{uca|u \in \Sigma^*, u \notin L\} \\ Kl[q_c] &= \{uc|u \in \Sigma^*, u \notin L, (\forall x \in \Sigma^*) u \neq xca\} \\ Kl[q_0] &= \{u|u \notin L, (\forall x \in \Sigma^*)(u \neq xc \wedge u \neq xca)\} = \Sigma^* - Kl[q_c] - Kl[q_{ca}] - Kl[q_F] \end{aligned}$$

Poslednú definíciu množiny $Kl[q_0]$ sme uviedli v dvoch tvaroch. Obidva sú správne. Všimnite si, že druhý tvar použil predchádzajúce množiny. Toto môžete spraviť, ale musíte si dať pozor, aby ste v definíciach nemali cyklus, čo sa niekoľkým z Vás podarilo.

Nesprávne riešenie:

$$\begin{aligned} Kl[q_0] &= Kl[q_0] \cdot \{a, b\} \cup Kl[q_c]b \cup Kl[q_{ca}] \cdot \{a, b\} \\ Kl[q_c] &= Kl[q_0]c \cup Kl[q_c]c \cup Kl[q_cac]c \\ Kl[q_{ca}] &= Kl[q_c]a \cup Kl[q_cac]a \\ Kl[q_{cac}] &= Kl[q_{ca}]c \\ Kl[q_F] &= Kl[q_{cac}] \cup Kl[q_F] \cdot \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Problém takéhoto riešenia je, že množiny $Kl[q_0]$ a $Kl[q_c]$ a $Kl[q_F]$ sú definované pomocou samého seba. Vieme z toho popisu povedať, ktoré slová do tých množín patria? Aj keby sme sa zbavili tohto, tak tam ostane ďalší cyklus. Preto ak chcete definovať jednu množinu pomocou druhej, tak si dajte pozor, aby ste v definíciach nemali cyklus.

Rada: keď napíčete posisy množín $Kl[q_i]$, tak si skontrolujte, či je každá dvojica z nich disjunktná (majú prázdny prienik) a či ich zjednotenie dáva Σ^*. Ak nie, tak môžete z určitosťou poveda5, že niekde máte chybu.

Dôkaz

V prvom rade si treba uvedomiť, čo treba dokázať:

- Treba dokázať, že automat M akceptuje jazyk L ($L_M = L$).
- Treba dokázať, že popisy $Kl[q_i]$ sú správne. To znamená, že ak

$$\begin{aligned} Kl'[q_F] &= \{u|u = xcacby, x, y \in \Sigma^*\} \\ Kl'[q_{cac}] &= \{ucac|u \in \Sigma^*, u \notin L\} \\ Kl'[q_{ca}] &= \{uca|u \in \Sigma^*, u \notin L\} \\ Kl'[q_c] &= \{uc|u \in \Sigma^*, u \notin L, (\forall x \in \Sigma^*) u \neq xca\} \\ Kl'[q_0] &= \{u|u \notin L, (\forall x \in \Sigma^*)(u \neq xc \wedge u \neq xca)\} \end{aligned}$$

  tak $Kl[q_i] = \{u|\hat{\delta}(q_0, u) = q_i\} = Kl'[q_i]$ (prvá rovnosť je definícia množiny $Kl[q_i]$).

Všimnite si, že $Kl[q_F] = L_M$ a zároveň $Kl'[q_F] = L$ čo znamená, že ak dokážeme druhé tvrdenie, tak tým zároveň dokážeme aj prvé tvrdenie.

Nech k je množina slov nad abecedou σ a $M_n(k)$ je funkcia definovaná nasledovne:

$$M_n(k) = \{u | u \in k, |u| = n\}$$

Inými slovami iba zoberieme všetky slová dĺžky n. Aby sme dokázali požadované (druhé) tvrdenie, ukážeme indukciou nasledovné tvrdenie: pre všetky prirodzené čísla n platí $M_n(Kl[q_i]) = M_n(Kl'[q_i]), q_i \in Q$

1. Nech $n = 0$. $Kl'[q_0] = \{\lambda\}, Kl'[q_i] = \emptyset, q_i \in Q, q_i \neq q_0$ Keďže $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = q_0$, tak tvrdenie platí.

2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n. Zoberme slovo $u \in \Sigma^*, |u| = n + 1$. Ukážeme že nech $\hat{\delta}(q_0, u) = q_i$. Ukážeme, že $u \in M_{n+1}(Kl'[q_i])$, čím ukážeme že $Kl[q_i] \subseteq Kl'[q_i]$. Keďže to ukážeme pre každé u, tak $Kl[q_i] = Kl'[q_i]$.

   Slovo u si rozdelíme na dve časti: $u = xy$, kde $|x| = n$ a $y \in \Sigma$. Zoberme si stav $q = \hat{\delta}(q_0, x)$. Z definície Kl vieme, že slovo u patrí do $Kl[q_i]$, kde $q_i = \delta(q, y)$. Ukážeme, že u patrí do $Kl'[q_i]$. Rozoberieme všetky prípady, čomu sa môže rovnať q.

   - $q = q_0$ Máme dve možnosti pre y:
     - $y \in \{a, b\}$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_0]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_0]$. Keďže x nekončí na c, ca a neobsahuje $cacb$, tak ani xy nebude končiť na c, ca a ani nebude obsahovať $cacb$. Preto $xy \in Kl'[q_0]$.
     - $y = c$. Z definície vieme že $xy \in Kl[q_c]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_0]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$, nekončí na c, ca ani cac. To znamená, že ak za neho pridáme c, tak bude končiť na c a nie na cac a preto $xy \in Kl'[q_c]$.
   - $q = q_c$ Máme tri možnosti pre y:
     - $y = a$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_{ca}]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_c]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na c a nekončí na cac. Ak za x pridáme znak a, tak potom xa končí na ca, neobsahuje $cacb$ a teda $xy \in Kl'[q_{ca}]$.
     - $y = b$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_0]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_c]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$, končí na c a nekončí na cac. Ak za x pridáme znak b, tak xb nekončí na c, ca, cac a ani neobsahuje $cacb$ a preto $xy \in Kl'[q_0]$.
     - $y = c$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_c]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_c]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na c ale nekončí na cac. Takže xc nebude stále obsahovať $cacb$, nebude končiť na cac a bude končiť na c. To znamená, že $xy \in Kl'[q_c]$.
   - $q = q_{ca}$ Máme dve možnosti pre y:
     - $y \in \{a, b\}$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_0]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_{ca}]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na ca. Preto $xy, y \in \{a, b\}$ nebude stále obsahovať $cacb$ a nebude končiť na c, ca ani cac. Preto $xy \in Kl'[q_0]$.
     - $y = c$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_{cac}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_{ca}]$. Preto x neobsahuje $cacb$, končí na ca. Ak pridáme c, tak xc končí na cac a stále neobsahuje $cacb$. To znamená, že $xy \in Kl'[q_{cac}]$.
   - $q = q_{cac}$. Máme tri možnosti pre y:
     - $y = a$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_{ca}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_{cac}]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na cac. Ak pridáme znak a, dostaneme reťazec xy končiaci na $caca$ čo znamená že končí na ca. xy neobsahuje $cacb$ (ak by obsahovalo, tak by x muselo obsahovať $cacb$) a preto $xy \in Kl'[q_{ca}]$.

- $y = b$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_F]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_{cac}]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na cac. Ak pridáme b, tak x bude končiť na $cacb$ (čiže už obsahuje $cacb$) a preto $xy \in Kl'[q_F]$.
- $y = c$. Z definície vieme, že $xy \in Kl[q_c]$. Z indukčného predpokladu vieme, že $x \in Kl'[q_{cac}]$. To znamená, že x neobsahuje $cacb$ a končí na cac. Ak pridáme znak c, xy stále nebude obsahovať $cacb$ a bude končiť na $cacc$, čiže spĺňa podmienky pre množinu $Kl'[q_c]$ a teda môžeme napísať $xy \in Kl'[q_c]$.

- $q = q_F$. Pre ľubovoľné y, $q_F = \delta(q, y)$, čiže $xy \in Kl[q_F]$. Ak x obsahuje $cacb$ ako podslovo, tak potom aj xy obsahuje $cacb$ ako podslovo a preto $xy \in Kl'[q_F]$.

Dokázali sme si, že pre všetky prirodzené čísla n platí $M_n(Kl[q_i]) = M_n(Kl'[q_i]), q_i \in Q$. Z toho už priamo vyplýva, že $Kl[q_i] = Kl'[q_i], q_i \in Q$.

Vzorové riešenia úlohy 4.2

a)

Automat môže vyzerať napríklad takto:

$$M_1 = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$F = \{q_4\}$$

Pechodová funkcia vyzerá nasledovne:

$\delta(q_0, 1) = q_1$	$\delta(q_1, 1) = q_5$	$\delta(q_2, 1) = q_3$	$\delta(q_3, 1) = q_5$	$\delta(q_4, 1) = q_4$
$\delta(q_0, 0) = q_5$	$\delta(q_1, 0) = q_2$	$\delta(q_2, 0) = q_5$	$\delta(q_3, 0) = q_4$	$\delta(q_4, 0) = q_4$
$\delta(q_5, 1) = q_5$	$\delta(q_5, 0) = q_5$			

Potom pre konečný automat M_1 platí:

$$\begin{aligned}
&KL[q_0] = \{\lambda\}\\
&KL[q_1] = \{1\}\\
&KL[q_2] = \{10\}\\
&KL[q_3] = \{101\}\\
&KL[q_4] = \{1010\}\{0, 1\}^*\\
&KL[q_5] = \{0, 11, 100, 1011\}\{0, 1\}^*\}
\end{aligned}$$

Teraz ešte musíme dokázať, že automat akceptuje jazyk L_1. Dokážeme to indukciou cez dĺžku slova.

Báza: Zoberme si slová dlžky najviac 4. Jediné takéto slovo, ktoré automat M_1 akceptuje je 1010 a je to zároveň jediné slovo, ktoré patrí do jazyka L_1. Teda automat M_1 akceptuje slová dĺžky najviac 4 práve vtedy keď patria do jazyka L_1.

$P(i) \Rightarrow P(i+1)$: Zoberme si slovo w_1 dĺžky i. Nech automat toto slovo neakceptuje(akceptuje), teda po prečítaní tohoto slova sa nachádza v stave $q_5(q_4)$. Podľa indukčného predpokladu slovo w_1 nemá(má) prefix 1010 a teda ani(aj) po pridaní jedného znaku nebude(bude) mať prefix 1010. Takisto automat po prečítaní ďalšieho znaku sa zo stavu $q_5(q_4)$ nedostane.

b)

Automat môže vyzerať napríklad takto:

$$M_1 = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$F = \{q_2\}$$

Pechodová funkcia vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, 1) = q_0 & \delta(q_0, 0) = q_1 \\ \delta(q_1, 1) = q_0 & \delta(q_1, 0) = q_2 \\ \delta(q_2, 1) = q_2 & \delta(q_2, 0) = q_2 \end{array}$$

Potom pre konečný automat M_2 platí:

$$\begin{aligned} KL[q_0] &= \{1, 01\}^* \\ KL[q_1] &= \{1, 01\}^*\{0\} \\ KL[q_2] &= \{0, 1\}^*\{00\}\{0, 1\}^* \end{aligned}$$

Teraz ešte musíme dokázať, že automat akceptuje jazyk L_2. Dokážeme to indukciou cez dĺžku slova.

Báza: Zoberme si slová dĺžky najviac 2. Jediné takéto slovo, ktoré automat M_2 akceptuje je 00 a je to zároveň jediné slovo, ktoré patrí do jazyka L_2. Teda automat M_2 akceptuje slová dĺžky najviac 2 práve vtedy keď patria do jazyka L_2.

$P(i) \Rightarrow P(i+1)$: Zoberme si slovo w_1 dĺžky i. Nech toto slovo obsahuje podslovo 00. Potom po pridaní jedného znaku bude patriť do jazyka L_2 a aj automat M_2 ho bude akceptovať.

Zoberme si slovo w_2 dĺžky i. Nech toto slovo neobsahuje podslovo 00 a má sufix 0. Potom sa automat po prečítaní tohoto slova nachádza v stave q_1. Slovo $w_2 1$ nepatrí do jazyka L_2 a takisto $\delta(q_1, 1) = q_0$, teda automat M_2 neakceptuje slovo $w_2 1$. Slovo $w_2 0$ patrí do jazyka L_2 a takisto $\delta(q_1, 0) = q_2$, teda automat M_2 neakceptuje slovo $w_2 0$.

Zoberme si slovo w_3 dĺžky i. Nech toto slovo neobsahuje podslovo 00 a má sufix 1. Potom sa automat po prečítaní tohoto slova nachádza v stave q_0. Slová $w_3 1$ a $w_3 0$ nepatria do jazyka L_2 a takisto $\delta(q_0, 1) = q_0$ a $\delta(q_0, 0) = q_1$, teda automat M_2 neakceptuje slová $w_3 1$ a $w_3 0$.

c)

Automat môže vyzerať napríklad takto:

$$M_3 = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$F = \{q_6\}$$

Prechodová funkcia vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{llll}
\delta(q_0,1)=q_1 & \delta(q_0,0)=q_5 & \delta(q_1,1)=q_3 & \delta(q_1,0)=q_5\\
\delta(q_2,1)=q_3 & \delta(q_2,0)=q_5 & \delta(q_3,1)=q_5 & \delta(q_3,0)=q_4\\
\delta(q_4,1)=q_7 & \delta(q_4,0)=q_6 & \delta(q_5,1)=q_5 & \delta(q_5,0)=q_5\\
\delta(q_6,1)=q_6 & \delta(q_6,0)=q_6 & \delta(q_7,1)=q_7 & \delta(q_7,0)=q_4
\end{array}$$

Potom pre konečný automat M_3 platí:

$$\begin{aligned}
KL[q_0] &= \{\lambda\}\\
KL[q_1] &= \{1\}\\
KL[q_2] &= \{10\}\\
KL[q_3] &= \{101\}\\
KL[q_4] &= \{1010\}\{1^+0\}^*\\
KL[q_5] &= \{0x, 11x, 100x, 1011x | x \in \{0,1\}^*\}\\
KL[q_6] &= \{1010\}\{1^+0\}^*\{0\}\{0,1\}^*\\
KL[q_7] &= \{1010\}\{1^+0\}^*\{1\}^+
\end{aligned}$$

Teraz ešte musíme dokázať, že automat akceptuje jazyk $L_3 = L_1 \cap L_2$. Dokážeme to indukciou cez dĺžku slova.

Báza: Zoberme si slová dĺžky najviac 5. Jediné takéto slovo, ktoré automat M_3 akceptuje je 10100 a je to zároveň jediné slovo, ktoré patrí do jazyka L_3. Teda automat M_3 akceptuje slová dĺžky najviac 5 práve vtedy keď patria do jazyka L_3.

$P(i) \Rightarrow P(i+1)$**:** Zoberme si slovo w_1 dĺžky i. Nech automat toto slovo akceptuje, teda po prečítaní tohoto slova sa nachádza v stave q_6. Podľa indukčného predpokladu slovo w_1 má prefix 1010 a obsahuje podslovo 00. Teda slová $w_1 1$ aj $w_1 0$ patria do jazyka L_3. Takisto $\delta(q_6, 1) = q_6$ a $\delta(q_6, 0) = q_6$, teda automat M_3 akceptuje slová $w_1 1$ a $w_1 0$.

Zoberme si slovo w_2 dĺžky i. Nech $w_2 \in KL[4]$. Potom $w_2 1 \notin L_3$ a $\delta(q_4, 1) = q_7$, teda M_3 neakceptuje $w_2 1$. Podobne $w_2 0 \in L_3$ a $\delta(q_4, 0) = q_6$, teda M_3 akceptuje $w_2 1$.

Zoberme si slovo w_3 dĺžky i. Nech $w_3 \in (KL[0] \cup KL[1] \cup KL[2] \cup KL[3] \cup KL[5] \cup KL[7])$. Potom $w_3 1 \notin L_3$ a $w_3 0 \notin L_3$. Takisto zo stavov $q_0, q_1, q_2, q_3, q_5, q_7$ sa automat M_3 nedostane do akceptačného stavu. Teda M_3 neakceptuje slová $w_3 1$ a $w_3 0$.

Časté chyby: Až na pár výnimiek nikto neuviedol dôkaz ekvivalencie jazyka a navrhnutého automatu. Niektorí ste zabudli napísať, ktorý stav je pre automat akceptačný.

Vzorové riešenia úlohy 4.3

Zadanie: Koľko existuje jazykov nad abecedou $\{a, b\}$, ktoré dokáže rozpoznať konečný automat s dvoma stavmi?

Riešenie: Ak máme daný počet stavov a abecedu konečného automatu, jednotlivé KA sa od seba môžu líšiť iba prechodovou funkciou a množinou akceptujúcich stavov. Prechodovú funkciu možno zadať $2^4 = 16$ rôznymi spôsobmi ($\delta(q_0, a) = q_0$ alebo q_1?, $\delta(q_0, b) = q_0$ alebo q_1?, $\delta(q_1, a) = q_0$ alebo q_1?, $\delta(q_1, b) = q_0$ alebo q_1?). Akceptujúce stavy možno vybrať 4 rôznymi spôsobmi (žiaden, q_0, q_1, obidva). Môžeme teda vytvoriť $16 * 4 = 64$ rôznych automatov.

Dva rôzne automaty však môžu rozpoznávať rovnaký jazyk, a našou úlohou je zistiť *počet jazykov*, nie automatov. Napríklad ak automat nemá ani jeden akceptujúci stav, potom nebude akceptovať žiadne slovo a nezáleží na tom, akú má prechodovú funkciu. Dokonca ani automat s akceptujúcim stavom q_1 nebude akceptovať žiadne slovo, ak $\delta(q_0, a) = \delta(q_0, b) = q_0$. Podobne automat s oboma akceptujúcimi stavmi bude akceptovať každé slovo; rovnako ako automat s akceptujúcim stavom q_0, kde $\delta(q_0, a) = \delta(q_0, b) = q_0$.

$L_1 = \emptyset$ — žiadne slovo

$L_2 = \{\Sigma^*\}$ — všetky slová

Pri hľadaní ďalších jazykov môžeme vychádzať z predpokladu, že automat má práve jeden akceptačný stav, a že aspoň jedna z hodnôt $\delta(q_0, a)$ a $\delta(q_0, b)$ sa rovná q_1. Máme teda dve možnosti pri výbere akceptujúceho stavu, tri možnosti pri výbere $\delta(q_0, a)$ a $\delta(q_0, b)$, a štyri možnosti pri výbere $\delta(q_1, a)$ a $\delta(q_1, b)$. To je spolu $2 * 3 * 4 = 24$ rôznych automatov.

Viacerí riešitelia uviedli číslo 24 ako výslednú hodnotu a zabudli pripočítať dva horeuvedené jazyky. (Niektorí riešitelia pripočítali iba jeden jazyk, zrejme v domnienke, že prázdny jazyk alebo automat bez akceptujúcich stavov nemožno považovať za riešenie.) Správna hodnota je teda 26 – a aj to len za predpokladu, že žiadne dva z týchto nových 24 automatov nerozoznávajú rovnaký jazyk.

Dôkaz rôznosti týchto ďalších jazykov možno urobiť napríklad hrubou silou; stačí do každého z nich dosadiť slová $\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$ a ukáže sa, že každý z automatov akceptuje inú podmnožinu tejto množiny. Toto dosadzovanie môžeme nahradiť aj vhodnou logickou úvahou.

Pre zaujímavosť, tu sú uvedené ďalšie jazyky rozoznateľné konečným automatom s dvoma stavmi. Pri všetkých vzorcoch predpokladáme $n \geq 0$; podobne pri slovnom popise výraz "párny počet" zahŕňa aj nulu. Zápis $\{w^?\}$ znamená $\{\lambda, w\}$.

$L_3 = \{\lambda\}$ — prázdne slovo

$L_4 = \{\Sigma^+\}$ — neprázdne slová

$L_5 = \{\Sigma^* a \Sigma^*\}$ — slová obsahujúce a

$L_6 = \{\Sigma^* b \Sigma^*\}$ — slová obsahujúce b

$L_7 = \{b^*\}$ — slová neobsahujúce a

$L_8 = \{a^*\}$ — slová neobsahujúce b

$L_9 = \{\Sigma^* a\}$ — slová končiace na a

$L_{10} = \{\Sigma^* b\}$ — slová končiace na b

$L_{11} = \{\lambda, \Sigma^* b\}$ — slová nekončiace na a

$L_{12} = \{\lambda, \Sigma^* a\}$ — slová nekončiace na b

$L_{13} = \{\Sigma^{2n}\}$ — slová párnej dĺžky

$L_{14} = \{\Sigma^{2n+1}\}$ — slová nepárnej dĺžky

$L_{15} = \{(b^* a)^{2n} b^*\}$ — slová obsahujúce párny počet a

$L_{16} = \{(a^* b)^{2n} a^*\}$ — slová obsahujúce párny počet b

$L_{17} = \{(b^* a)^{2n+1} b^*\}$ — slová obsahujúce nepárny počet a

$L_{18} = \{(a^* b)^{2+n} a^*\}$ — slová obsahujúce nepárny počet b

$L_{19} = \{(\Sigma^* b)^? a^{2n}\}$ — slová končiace párnym počtom a

$L_{20} = \{(\Sigma^* a)^? b^{2n}\}$ — slová končiace párnym počtom b

$L_{21} = \{(\Sigma^* b)^? a^{2n+1}\}$ — slová končiace nepárnym počtom a

$L_{22} = \{(\Sigma^* a)^? b^{2n+1}\}$ — slová končiace nepárnym počtom b

$L_{23} = \{\{\lambda, (\Sigma^* b)^? a^{2n+1}\}$ — slová končiace nepárnym počtom a, plus prázdne slovo

$L_{24} = \{\{\lambda, (\Sigma^* a)^? b^{2n+1}\}$ — slová končiace nepárnym počtom b, plus prázdne slovo

$L_{25} = \{\Sigma^* b a^{2n}\}$ — neprázdne slová končiace párnym počtom a

$L_{26} = \{\Sigma^* a b^{2n}\}$ — neprázdne slová končiace párnym počtom b