Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 3.1

Pôvodné zadanie V pôvodnom zadaní bola chyba, preto bolo dôležité, aby ste si uvedomili, ako vyzerajú jazyky L_1 a L_2. V jazyku L_1 sú slová dĺžky 1, ktoré majú rovnako veľa písmen a ako písmen b. To znamená, že $L_1 = \emptyset$. (Pozor, neznamená to, že L_1 neexistuje! Množina čísel tvaru $2k+1$, ktoré sú deliteľné dvoma tiež existuje a je prázdna. To, že podmienke nevyhovuje žiadne slovo znamená len to, že výsledný jazyk bude prázdny) Rovnako môžeme vidieť, že $L_2 = \emptyset$.

Preto netreba spraviť žiadnu operáciu. (Aj nula operácií je konečný počet.) Tým, ktorým by vadilo, že nerobíme žiadnu operáciu ponúkame nasledovné riešenia: $L_1 \cup L_1 = L_2$, $L_1 \cap L_1 = L_2$, $h(L_1) = L_2$ pre ľubovoľný homomorfizmus h, $L_1L_1 = L_2$, atď.

Opravené zadanie Máme jazyk, ktorý obsahuje všetky slová nad abecedou $\{a, b\}$ s rovnakým počtom písmen a a b. Chceme skonštruovať jazyk, ktorý obsahuje všetky slová nad abecedou $\{a, b, c\}$ s rovnakým počtom písmen a, b a c.

Myšlienka je nasledovná. Zostrojíme pomocný jazyk L_3, ktorý bude obsahovať všetky slová nad abecedou $\{a, b, c\}$ s rovnakým počtom a a b. Zostrojíme pomocný jazyk L_4, ktorý bude obsahovať všetky slová nad abecedou $\{a, b, c\}$ s rovnakým počtom a a c. Potom $L_2 = L_3 \cap L_4$, pretože v prieniku budeme mať všetky tie slová, ktoré majú (rovnaký počet a a b a zároveň rovnaký počet a a c), čo je presne to, čo sme chceli. Ostáva už len ukázať, ako skonštruovať L_3 a L_4. Jazyk L_3 zostrojíme inverzným homomorfizmom k homomorfizmu $h_1 : \{a, b, c\}^* \to \{a, b\}^*$, ktorý zobrazí a na a, b na b a c na λ. Potom $L_3 = h_1^{-1}(L_1)$. (Inverzný homomorfizmus „povkladá“ na ľubovoľné miesta ľubovoľný počet písmen c). Podobne L_4 zostrojíme inverzným homomorfizmom $h_2 : \{a, b, c\}^* \to \{a, b\}^*$, ktorý zobrazí a na a, b na λ a c na b. Inverzný homomorfizmus h_2^{-1} teda zmení písmená b na písmená c a povkladá na ľubovoľné miesta ľubovoľný počet písmen b, teda $L_4 = h_2^{-1}(L_1)$.

Dokopy dostávame vzťah $L_2 = h_1^{-1}(L_1) \cap h_2^{-1}(L_1)$.

Časté chyby V pôvodnom zadaní ste často nevedeli zistiť, že oba jazyky su rovnaké – prázdne. Tiež ste občas napísali že w môže byť a , b, alebo λ, čo však nie je pravda, lebo $\lambda \notin \{a, b\}$. V opravenom zadaní trebalo prísť na „trik“ s inverznými homomorfizmami. Mnohí z vás sa snažili úlohu riešiť len zjednocovaním homomorfnych obrazov L_1, čo nešlo.

Treba si dávať pozor pri definovaní homomorfizmu. Homomorfizmus musí zachovávať zreťazenie, teda $h(uv) = h(u)h(v)$ a musí byť definovaný na všetkých slovách z vstupnej abecedy. Vhodným spôsobom ako definovať homomorfizmus je, že napíšete na čo sa zobrazia jednotlivé písmená. Inverzný homomorfizmus definujeme pomocou homomorfizmu.

Niektorí ste sa snažili skonštruovať L_2 a v konštrukcii ste použili samotný L_2. (Napríklad vyrobíme niečo a potom to niečo sprienikujeme s L_2 a dostávame L_2) To ale nebolo povolené, pretože ste mali použiť len L_1 (a operácie)!

Vzorové riešenia úlohy 3.2

a)

Riešenie mohlo vyzerat napríklad takto:

$$L = \{a\}^* \cup \{b^i; i \in \{1, .., 30\}\}$$

$$h(a) = \lambda$$

$$h(b) = b$$

$$h(\lambda) = \lambda$$

Je vidno, že $h(L) = \{b^i; i \in \{0, .., 30\}\} = \{b^i; i \in \{1, .., 30\}\} \cup \{\lambda\}$, co je presne 31 slov.

b)

Hladaný jayzk je napríklad $L = \{a\}^* - \{a^i; i \in \{32, .., 62\}\}$. $L^2 = \{a\}^*$, lebo množinu $\{a^i; i \in \{32, .., 62\}\}$ vieme vytvorit zretazením dvojíc slov z jazyka L. Kedže $L^2 = \{a\}^*$, tak $L^2 = L^*$. Je vidno, že jazyk $L^* - L = \{a^i; i \in \{32, .., 62\}\}$ má 31 slov.

c)

Takáto situácia nemôže nastat. Nech L je nekonecný jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ a $h_1, h_2 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sú homomorfizmy. Potom prienik musí byt neprázdny, lebo by nemal 31 slov. Prienik teda musí obsahovat aspon 1 slovo. Oznacme toto slovo w. Pretože na oboch stranách prieniku sú Kleeneho $*$, prienik obsahuje aj všetky mocniny slova w. Teda $\{w\}^* \in (h_1(L))^* \cap (h_2(L))^*$. Ak $w = \lambda$, tak $\{w\}^* = \{\lambda\}$. Ak $w \neq \lambda$, tak $\{w\}*$ je nekonecný jazyk. Vidíme, že ak by prienik obsahoval len λ, tak jazyk z prieniku obsahuje len jedno slovo a ak obsahuje akékolvek iné slovo, tak je jazyk z prieniku nekonecný. Teda jazyk z prieniku nemôže mat presne 31 slov.

Casté chyby: V príklade a) ste casto mali jazyk ktorý obsahoval λ, ale v homomorfizme ste zabudli definovat na co sa λ zobrazí.

V príklade b) ste niektorí argumentovali, že rozdiel dvoch nekonecných jazykov je nekonecný. V riešení príkladu b) je príklad kedy to neplatí.

V príklade c) sa podobne vyskytli zlé argumenty, že prienik dvoch nekonecných jazykov musí byt prázdny alebo nekonecný. Niektorí ste tvrdili, že ak $(h_1(L)) \cap (h_2(L)) = \emptyset$, tak aj $(h_1(L))^* \cap (h_2(L))^* = \emptyset$. Toto tvrdenie neplatí napríklad pre $h_1(L) = \{a\}$ a $h_2(L) = \{aa\}$. Takisto ste mnohí zabúdali, že L^* obsahuje len jedno slovo ak $L = \lambda$ a tvrdili ste, že L^* musí byt nekonecný ak L je neprázdny.

Vzorové riešenia úlohy 3.3