Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 2.1

a)

Prekvapivo, väčšina riešiteľov pochopila zadanie tak, že si môžu prispôsobiť hodnoty m a n tak, aby dostali najmenší počet prvkov v zreťazení. Nasledovalo riešenie: $m = 1, n = 1$, zreťazenie jazykov má jeden prvok.

Pôvodná úloha však bola o tom, že hodnoty m a n sú dané, a pre tieto dané hodnoty máme nájsť najmenší možný počet prvkov zreťazení $L_1.L_2$. To zahŕňa aj prípady, keď $m > 1$ a $n > 1$.

Tí, ktorí správne pochopili zadanie, zvyčajne našli optimálne riešenie:

$$L_1 = a, a^2, a^3 ... a^m$$

$$L_2 = a, a^2, a^3 ... a^n$$

$$L_1.L_2 = a^2, a^3, a^4 ... a^{m+n}$$

$$|L_1.L_2| = m + n - 1$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj pri riešení:

$$L_1 = \lambda, a, a^2 ... a^{m-1}$$

$$L_2 = \lambda, a, a^2 ... a^{n-1}$$

Jedna vec je však optimálne riešenie nájsť, a druhá je dokázať, že je naozaj optimálne. Inými slovami, stopercentne presvedčiť čitateľa, že sa nám použitím žiadneho iného chytrého triku nemôže podariť vytvoriť menšie $L_1.L_2$, lebo tomu bránia nejaké principiálne dôvody. Takýto dôkaz však nikto neuviedol. Keby áno, mohol znieť napríklad takto:

Slová jazyka L_1 označme $u_1, u_2, u_3 ... u_m$, pričom u_1 bude najkratšie z nich. (Ostatné slová z L_1 majú teda väčšiu alebo rovnakú dĺžku.) Slová jazyka L_2 označme $v_1, v_2, v_3 ... v_n$, pričom v_n bude najdlhšie z nich. (Ostatné slová z L_2 majú teda menšiu alebo rovnakú dĺžku.) Dôkaz bude založený na tvrdení, že medzi slovami $u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3 ... u_1v_n, u_2v_n, u_3v_n ... u_mv_n$ sa nenachádzajú žiadne dve rovnaké slová; a preto musí $L_1.L_2$ obsahovať prinajmenšom týchto $m + n - 1$ rôznych slov.

Medzi slovami u_1v_1 až u_1v_n sa zrejme nemôžu nachádzať dve rovnaké slová, pretože v_1 až v_n sú rôzne. Medzi slovami u_1v_n až u_mv_n sa takisto nemôžu nachádzať dve rovnaké slová, pretože u_1 až u_m sú rôzne. Zostáva nám ešte vylúčiť možnosť, že existuje také $1 \leq i < n, 1 < j \leq m$, pre ktoré $u_1v_i = u_jv_n$.

Použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že $u_1v_i = u_jv_n$. Keďže u_1 nie je dlhšie ako u_j a ani v_i nie je dlhšie ako v_n, slová u_1v_i a u_jv_n môžu mat rovnakú dĺžku len vtedy, keď $|u_1| = |u_j|$ a $|v_i| = |v_n|$. Slová u_1 a u_j sú však rôzne. Dve rôzne slová rovnakej dĺžky nemôžu byt prefixom toho istého slova; pričom u_1 je prefixom u_1v_i a u_j je prefixom u_jv_n. To je spor s predpokladom, že u_1v_i a u_jv_n je to isté slovo.

Tým sme teda dokázali, že medzi slovami $u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3 ... u_1v_n, u_2v_n, u_3v_n ... u_mv_n$ sa nenachádzajú dve rovnaké slová. Pretože všetkých týchto $m + n - 1$ slov patrí do $L_1.L_2$, musí mat $L_1.L_2$ prinajmenšom $m + n - 1$ slov.

Poznámka: Tento dôkaz mohol byt kratší (a je otázne, či vďaka tomu zrozumiteľnejší), keby som bol použil menej slov a viac symbolov. Úmyselne som ho však napísal takto, lebo na cvikách opakovane dostávam otázku, nakoľko formálny musí byt dôkaz.

Nie je cielom nahradiť všetky slová značkami a gréckymi písmenkami. Dôležité je, aby ste vo svojom dôkaze nezabudli na nič dôležité. Formálnosť zápisu vás k tomu do istej miery núti. Pri neformálnom vyjadrovaní si musíte sami dávať pozor, či ste nejaké slovko v jednej vete náhodou nepoužili v trochu inom význame ako v nasledujúcej, a či vám vďaka tomu neunikla nejaká dôležitá odbočka, ktorou by sa z vášho dôkazu možno dalo vykĺznuť.

Hodnotenie: 3 body za vzorec m + n - 1; 2 body za dôkaz (nezískal nikto).

b)

Pripomeňme si, že prefixom nejakého slova je aj toto slovo samotné, keďže $w = w.\lambda$. Ak má L_1 obsahovať všetky prefixy $L_1.L_2$, musí potom obsahovať aj všetky slová z $L_1.L_2$, ciže $L_1.L_2$ je podmnožinou L_1.

Ďalej si pripomeňme, že podľa zadania sú jazyky L_1 aj L_2 neprázdne, co je dôležitý predpoklad niektorých z nasledujúcich úvah.

Keby jazyk L_2 obsahoval slovo nenulovej dĺžky, nemohlo by platiť, že $L_1.L_2$ je podmnožinou L_1. Do $L_1.L_2$ by totiž patrilo aj zreťazenie najdlhšieho slova z L_1 a tohto nenulového slova z L_2, co je dokopy dlhšie slovo ako toho najdlhšie slovo z L_1, a teda logicky nemôže patriť do L_1.

Ak je teda jazyk L_2 neprázdny a zároveň neobsahuje slová nenulovej dĺžky, potom $L_2 = \lambda$.

Potialto sa dostali prakticky všetci riešitelia. Niektorí ale zabudli doplniť ďalšiu podmienku, ktorá je po opätovnom prečítaní zadania zrejmá, no počas horeuvedených úvah sa na nu ľahko zabudne; totiž, že jazyk L_1 musí obsahovať všetky prefixy L_1.

Občas sa vyskytli podobné, no nepravdivé tvrdenia.

Po prvé, že L_1 musí obsahovať všetky prefixy svojho *najdlhšieho* slova. To nestačí; jazyk $\{\lambda, a, aa, aaa, bb\}$ obsahuje všetky prefixy svojho najdlhšieho slova, ale napriek tomu nie každého slova.

Po druhé, že L_1 musí obsahovať všetky *podslová* každého svojho slova. To je zase priveľa; jazyk $\{\lambda, a, ab\}$ neobsahuje všetky podslová, ale aj tak obsahuje všetky prefixy.

Po tretie, niektorí riešitelia si podmienku "každý prefix z $L_1.L_2$ patrí do L_1" zapísali ako "každé slovo z L_1 je prefixom nejakého slova z $L_1.L_2$", a potom pekne formálne dokázali, že ak $L_2 = \{\lambda\}$, platí to vždy. Áno, to druhé tvrdenie v takom prípade platí vždy; ale to prvé nie vždy.

Po štvrté, vyskytol sa názor, že L_1 nemôže obsahovať slová dĺžky väčšej ako 1. Môže; len musí obsahovať aj všetky ich prefixy.

Niektorí riešitelia riešili túto úlohu aj pre nekonečné jazyky L_1, L_2. V zadaní to nebolo, takže som nekonečné riešenia pri hodnotení ignoroval. To je pre daných riešiteľov dobre, pretože oblasť konečných jazykov vyriešili dobre, ale oblasť nekonečných jazykov vyriešili nesprávne.

Hodnotenie: 3 body za $L_2 = \{\lambda\}$; 2 body za "L_1 obsahuje všetky svoje prefixy".

Vzorové riešenia úlohy 2.2

Vo všetkých troch prípadoch sa dali jazyky buď vymysliet a následne dokázať, že rovnosť pre takéto jazyky neplatí alebo na základe vlastností, ktoré vo vzťahoch platia dôjsť k riešeniu.

a)

Jazyky pre ktoré rovnosť neplatí su napríklad $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$. To, že vzťah neplatí ukážeme sporom. Tieto jazyky dosadíme do vzťahu:

$$(L_1 \cup L_2)^* = L_1(L_2L_1)^*$$

$$\{a, b\}^* = \{a\}\{ba\}^*$$

Vidíme, že $\lambda \in \{a, b\}^*$ a zároveň $\lambda \notin \{a\}\{ba\}^*$, čo je hľadaný spor.

Na to aby sme našli jazyky pre ktoré tento vzťah neplatí si stačí uvedomiť, že na ľavej strane rovnosti bude vždy λ a na pravej strane λ nebude ak $\lambda \notin L_1$.

b)

Jazyky môžeme nájsť obdobne ako v prípade a), teda rovnosť neplatí pre jazyky $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$. Nerovnosť ukážeme sporom:

$$(L_1L_2)^* = L_1(L_2L_1)^*$$

$$\{ab\}^* = \{a\}\{ba\}^*$$

Vidíme, že $\lambda \in \{a, b\}^*$ a zároveň $\lambda \notin \{a\}\{ba\}^*$, čo je hľadaný spor.

c)

Jazyky pre ktoré rovnosť neplatí sú napríklad $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{\lambda, a\}$. Nerovnosť dokážeme sporom:

$$L_2(L_2 - L_1) = L_2^2 - (L_2L_1)$$

$$\{\lambda, a\}\{\lambda\} = \{\lambda, a, aa\} - \{a, aa\}$$

$$\{\lambda, a\} = \{\lambda\}$$

Posledná rovnosť neplatí, čo je hľadaný spor.

Pri hľadaní jazykov môžeme postupovať napríklad nasledovne. Zvolíme si jazyky tak, aby platilo $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Tada $L_2 - L_1 = L_2$ a $L_2(L_2 - L_1) = L_2^2$. Na to, aby neplatila rovnosť $L_2^2 = L_2^2 - (L_2L_1)$ musí pltiť $L_2^2 \cap L_2L_1 \neq \emptyset$. Takéto jazyky sú napríklad $L_1 = \{aa\}$, $L_2 = \{\lambda, a\}$.

Časté chyby: Často ste zabúdali, že $\lambda \in L^*$. Takisto ste si niektorí neuvedomili, že z definície Kleeneho $*$ vyplýva, že $\lambda \in \emptyset^*$. Vyskytli sa prípady, kde na základe nerovnosti $(L_1L_2)^1 \neq L_1(L_2L_1)^1$ resp. $(L_1L_2)^0 \neq L_1(L_2L_1)^0$ ste tvrdili, že neplatí rovnosť pre celý uzáver ($(L_1L_2)^* \neq L_1(L_2L_1)^*$). Treba si uvedomiť, že z jedej konkrétnej mocniny nevyplýva nutne tvrdenie pre celý uzáver.

Vzorové riešenia úlohy 2.3

Bodovanie + nedostatky To, že rovnosť platí, ste zistili všetci. Len málo z vás ale toto tvrdenie poriadne dokázalo.

Mnohí šli cestou slovnej interpretácie obsahu jazykov (*"...keď si napíšeme, čo patrí do tejto množiny, je zjavné..."*) na oboch stranách a na jej základe spokojne prehlásili, že ich rovnosť platí. Vaše šťastie bolo, že v tomto prípade bola interpretácia veľmi jednoduchá a nebolo sa kde pomýliť. Takýto prístup ale nie je formálny dôkaz. A čo keby jazyky neboli tak jednoducho popísateľné? Správny dôkaz by sa mal opierať o definície operácii nad množinami (jazykmi) a vzťahmi medzi nimi. Slovný opis postupu nie je dôkaz.

Iní sa pokúšali sformulovať myšlienky formálne, avšak zanedbávali dôkaz vecí, ktore sú síce jednoduché a priamočiare, ale nie priamo vyplývajúce z definície. Všimnite si naše vzorové riešenie a podobné dôkazy v knihe.

Za správny výsledok a ľubovoľné zrozumiteľné odôvodnenie bez vážnych chýb sa udeľovalo 5-6 bodov. Za poriadny správny dôkaz bol plný počet bodov - 10. Ostatné riešenia dostali počet bodov zodpovedajúci relatívnej kvalite.

Riešenie Najskôr si úlohu trošku zjednodušíme a ukážeme pomocné tvrdenie:

$$(\{a\}^* \cup \{b\})^* = (\{a\} \cup \{b\})^*$$

Toto tvrdenie síce vyzerá zjavne, ale dokázať ho treba! Rovnosť by sme dokazovali dvoma inklúziami. Keďže ale jednotlivé kroky a implikácie sú jednoduché a zhodou okolností všetky platia aj opačne, budeme dokazovať postupnosťou ekvivalencií. Teda dokážeme, že slovo patrí na ľavú stranu práve vtedy, keď patrí na pravú. Nech pre ľubovoľný znak a platí $a^0 = \lambda$.

$$\begin{aligned}
&w \in (\{a\}^* \cup \{b\})^* \\
&\Leftrightarrow \exists n \geq 0, w \in (\{a\}^* \cup \{b\})^n \\
&\Leftrightarrow (w = \lambda) \vee (\exists n \geq 1, w = u_1 u_2 \dots u_n | \forall i, 1 \leq i \leq n, u_i \in \{a\}^* \cup \{b\}) \\
&\Leftrightarrow (w = \lambda) \vee (\exists n \geq 1, w = u_1 u_2 \dots u_n | \forall i, 1 \leq i \leq n, (\exists m_i \geq 0, u_i \in \{a\}^{m_i}) \vee (u_i = b)) \\
&\Leftrightarrow (w = \lambda) \vee (\exists n \geq 1, w = u_1 u_2 \dots u_n | \forall i, 1 \leq i \leq n, (\exists m_i \geq 0, u_i = a^{m_i}) \vee (u_i = b)) \\
&\Leftrightarrow (w = \lambda) \vee (\exists m \geq 1, w = v_1 \dots v_m | \forall i, 1 \leq i \leq m, v_i = b \vee v_i = a) \\
&\Leftrightarrow (w = \lambda) \vee (\exists m \geq 1, w = v_1 \dots v_m | \forall i, 1 \leq i \leq m, v_i \in \{a\} \cup \{b\}) \\
&\Leftrightarrow \exists m \geq 0, w \in (\{a\} \cup \{b\})^m \Leftrightarrow w \in (\{a\} \cup \{b\})^*
\end{aligned}$$

Vďaka tejto identite jazykov môžeme hlavné tvrdenie prepísať.

$$(\{a\} \cup \{b\})^* (\{a\} \cup \{b\}^+) = \{a, b\}^+$$

Dôkaz bude, podobne ako v predchádzajúcom prípade, prebiehať ako séria ekvivalencií, pomocou ktorých ukážeme, že slovo patrí do jazyka na ľavej strane práve vtedy, keď patrí do jazyka na pravej strane.

$$\begin{aligned}
&w \in (\{a\} \cup \{b\})^* (\{a\} \cup \{b\}^+) \\
&\Leftrightarrow w = uv | u \in (\{a\} \cup \{b\})^*, v \in \{a\} \cup \{b\}^+ \\
&\Leftrightarrow w = uv | \exists n \geq 0, u \in (\{a\} \cup \{b\})^n, (v \in \{a\}) \vee (v \in \{b\}^+) \\
&\Leftrightarrow w = uv | (u = \lambda) \vee (\exists n \geq 1, u = u_1 \dots u_n, \\
&\forall i, 1 \leq i \leq n, u_i \in \{a\} \cup \{b\}), (v = a) \vee (\exists m \geq 1, v \in \{b\}^m) \\
&\Leftrightarrow (w = ua) \vee (\exists m \geq 1, w = ub^m) | (u = \lambda) \vee (\exists n \geq 1, \\
&u = u_1 \dots u_n, \forall i, 1 \leq i \leq n, u_i \in \{a, b\}) \\
&\Leftrightarrow (w = ua) \vee (w = ub) | (u = \lambda) \vee (\exists k \geq 1, u \in \{a, b\}^k) \\
&\Leftrightarrow \exists m \geq 1, w \in \{a, b\}^m \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^+
\end{aligned}$$

Postupnosť myšlienok v tomto vzorovom riešení nie je zďaleka jediné možné riešenie, ktoré by dostalo plný počet bodov. Dokonca ani nebolo vyžadované take precízne formálne rozpisovanie (aj my sme to v druhom dôkaze spájali kroky do jedného). Avšak všimnite si, že používame len definície operácií nad jazykmi, množinové operácie a logické spojky.