Úvod do TI 2010

Vzorové riešenia úlohy 1.1

Bodovanie: Za prvú úlohu je maximálny počet bodov 4, za druhú a tretiu 3 body. Výsledné body sa dostali dostali sčítaním bodov za čiastkové úlohy a zaokrúhlením nahor na celé číslo.

V úlohe sa bodovali dve časti: výsledok a dôkaz. Za každú časť sa dala dostať polovica bodov.

Časté chyby: Veľmi často sa stávalo, že ste mali dobrý výsledok, ale ale mali ste k nemu pripísané „Prečo?". Problémom bolo, že ste nedostatočne odôvodňovali prečo je výsledok správny. Za dostatočné odôvodnenie sa nepovažuje ukázanie, že to funguje na niekoľkých príkladoch. Vo všeobecnosti, „uhádnete" vzorec (napríklad tak že si všimnete nejakú zákonitosť), tak ho nestačí len napísať ale treba ho aj dokázať.

Ďalšou častou chybou bolo, že ste v úlohách b a c zabúdali na to, že slovo λ je podslovo ľubovoľného slova.

a)

Správne riešenie: Chceme vedieť počet slov, ktoré obsahujú najviac k symbolov c. Označme si množinu takých slov M. Nech $F_{i,n}$ je množina slov dĺžky n ktoré obsahujú práve i symbolov c. Potom

$$M = \cup_{i=0}^{k} F_{i,n}$$

Pre ľubovoľné i a j, $i \neq j$ sú množiny $F_{i,n}$ a $F_{j,n}$ disjunktné, lebo ich slová sa líšia v počte symbolov c. Preto môžeme napísať

$$|M| = \left|\cup_{i=0}^{k} F_{i,n}\right| = \sum_{i=0}^{k} |F_{i,n}|$$

Potrebujeme vypočítať $|F_{i,n}|$. Máme $\binom{n}{i}$ možností kam rozmiestniť i symbolov c v slove dĺžky n (vyberáme si i pozícii z n možných). Ostáva nám $n-i$ voľných miest, kde môžu byť iba symboly a, b. Tieto vieme umiestniť 2^{n-i} možnosťami. Preto

$$|F_{i,n}| = \binom{n}{i} 2^{n-i}$$

Dosadením do predchádzajúceho vzťahu dostaneme požadovaný výsledok:

$$|M| = \left|\cup_{i=0}^{k} F_{i,n}\right| = \sum_{i=0}^{k} |F_{i,n}| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} 2^{n-i}$$

Zlé riešenie: Niektorí z Vás prišli s nasledovným riešením: $3^n - 2^n$ s odôvodnením, že 3^n je počet všetkých možných slov dĺžky n a 2^n je počet slov ktoré neobsahujú symbol c. Toto je avšak odpoveď na otázku: „Koľko existuje slov dĺžky n, ktoré majú aspoň jedno c?". Otázka v zadaní bola iná: „Koľko existuje slov dĺžky n, ktoré majú najviac k symbolov c?".

b)

Zoberme si slovo x dĺžky n. Má práve jedno podslovo dĺžky 0 (je to λ). x má najviac n podslov dĺžky 1 (lebo nemusia byť nutne rôzne), najviac $n-1$ podslov dĺžky 2, ... Vo všeobecnosti slovo dĺžky n má najviac $n-i+1$ podslov dĺžky $i, 0 < i \leq n$. Preto počet podslov môže byť najviac $\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)+1 = \sum_{j=1}^{n} j + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Táto suma sa dá dosiahnuť práve vtedy, keď všetky podslová sú rôzne. To dosiahneme ak máme abecedu $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a slovo $a_1 a_2 \ldots a_n$.

c)

Každé slovo x dĺžky n má aspoň $n+1$ podslov, lebo pre každú dĺžku $0 \le i \le n$ prefix slova x dĺžky i je podslovom slova x (a prefixy rôznej dĺžky sú určite rôzne). Existuje slovo ktoré má $n+1$ podslov?

Áno. Zoberme si abecedu $\Sigma = \{a\}$ a slovo $x = a^n$. Pre ľubovoľné $0 \le m \le n$ sú všetky podslová dĺžky m zo slova x rovnaké a preto slovo x má práve jedno podslovo každej dĺžky, čiže má $n+1$ podslov.

Poznámka: Túto úlohu sme mali skoro všetci dobre, akurát mnohí z Vás zabudli na to, že existuje aj slovo λ, ktoré je podslovom ľubovoľného slova.

Vzorové riešenia úlohy 1.2

Budeme riešiť len časť b), pretože časť a) je len špeciálny prípad časti b) pre $b = 10$. Číslo 0 je špeciálnym prípadom, pre nulu je dĺžka zápisu rovná 1. Ukážeme si dve riešenia pre $x > 0$.

Prvé riešenie: Majme číslo x a príslušné slovo $w_x \in \Sigma_b$, ktoré je reprezentáciou čísla x v sústave, so základom b. Aké slovo dĺžky $|w_x|$ reprezentuje najmenšie číslo?[1] Je to samozrejme slovo $10^{|w_x|-1}$, reprezentujúce číslo $b^{|w_x|-1}$. Aké slovo dĺžky $|w_x|$ reprezentuje najväčšie číslo? Je to slovo[2] $(b-1)^{|w_x|}$, ktoré reprezentuje číslo

$$\sum_{i=0}^{|w_x|-1} (b-1) \cdot b^i = \left(\sum_{i=0}^{|w_x|-1} b^{i+1} \right) - \left(\sum_{i=0}^{|w_x|-1} b^i \right) = b^{|w_x|} - 1.$$

Keďže najväčšie $|w_x|$-ciferné číslo je určite väčšie alebo rovné x a najmenšie $|w_x|$-ciferné číslo je určite menšie alebo rovné x, môžeme napísať:

$$b^{|w_x|-1} \le x \le b^{|w_x|} - 1.$$

Aby sme sa zbavili čísla -1, zameníme posledné znamienko $\le$ za $<$. Dostávame

$$b^{|w_x|-1} \le x < b^{|w_x|}.$$

Zlogaritmovaním pri základe b dostávame

$$\begin{aligned} |w_x| - 1 \le \quad & \log_b x & < |w_x|, \\ |w_x| \le \quad & (\log_b x) + 1 & < |w_x| + 1. \end{aligned}$$

Keďže $|w_x|$ je celé číslo, môžeme napísať $|w_x| = \lfloor (\log_b x) + 1 \rfloor = \lfloor \log_b x \rfloor + 1$.

Druhé riešenie: Na výsledok $|w_x| = \lfloor \log_b x \rfloor + 1$ prídeme napríklad skúšaním rôznych čísel a rôznych číselných sústav, alebo si ho pamatáme z iného predmetu. Teraz už stačí len tento výsledok dokázať.

Môžeme použiť matematickú indukciu:

1° $x = 1$, $|w_1| = 1 = \lfloor \log_b 1 \rfloor + 1$.

2° Ak tento vzťah platí pre x, ukážeme, že platí aj pre $x+1$. Rozoberieme dva prípady:

- $|w_{x+1}| = |w_x| + 1$. Toto nastáva iba v prípade, že x je najväčšie číslo zapísateľné $|w_x|$ znakmi. Z predchádzajúceho riešenia vieme, že $x = b^{|w_x|} - 1$. Potom $x + 1 = b^{|w_x|}$ a $\lfloor \log_b b^{|w_x|} \rfloor + 1 = |w_x| + 1$.

[1] Neuvažujeme reprezentácie čísel, ktoré začínajú nulou.

[2] Tu je $(b-1)$ jeden znak z abecedy Σ_b, napríklad pre Σ_{10} je to 9.

- $|w_{x+1}| = |w_x|$. Keďže $x + 1 < b^{|w_x|}$, tak $\lfloor \log_b(x+1) \rfloor < |w_x|$. Z toho, že logaritmus je rastúca funkcia (pre $b > 1$) vieme, že $\lfloor \log_b(x+1) \rfloor \geq \lfloor \log_b x \rfloor = |w_x| - 1$. Dolná celá časť z logaritmu je však celé číslo. Celé číslo menšie ako $|w_x|$ ale väčšie alebo rovné ako $|w_x| - 1$. Z toho je jasné, že $\lfloor \log_b(x+1) \rfloor + 1 = |w_x|$, čo sme chceli dokázať.

Vzorové riešenia úlohy 1.3

V tomto príklade stačilo nájsť kontrapríklad. Napríklad dve slová $w_1 = a$ a $w_2 = b$ nad abecedou $\{a, b\}$. Je zrejmé, že $w_1 w_2 = ab \neq ba = w_2 w_1$. Takže opereácia zreťazenia slov nie je komutatívna. Napriek tomu, že v úlohe bolo explicitne uvedené, že máte skúmať operáciu zreťazenia slov, viacerí z vás skúmali opereráciu zreťazenia jazykov. V tomto prípade je odpoveď rovnaká a aj počet získaných bodov bol rovnaký. Poučenie: zadanie treba čítať pozorne, lebo môžete vyriešiť inú úlohu než máte!