Turingove stroje

Konečné automaty nedokázali rozpoznať mnohé jazyky (neregulárne jazyky), lebo nám chýbala pamäť. Turingovej stroje už pamäť majú – konkrétne máme k dispozícii jednosmerne nekonečnú pásku, z ktorej vieme čítať a na ktorú vieme zapisovať. (Môžete si ju predstaviť ako string, ktorý čítate po znakoch a tie znaky viete meniť.) Vďaka tejto pamäti už vieme rozpoznať aj neregulárne jazyky a riešiť rôzne algoritmické problémy. Turingov stroj je práve modelom algoritmu.

Poďme si ho definovať. Z TI(1) si pamätáme, že konečný automat bol definový päticou – množinou stavov, abecedou, prechodovou funkciou, vstupným stavom a množinou akceptačných stavov. Turingov stroj je definovaný sedmicou.

1. Q – konečná množina stavov,
2. Σ – vstupná abeceda (abeceda, z ktorej je slovo na vstupe),
3. Γ – pracovná abeceda, kam patrí vstupná abeceda, symboly $\not{c}, \sqcup$ a prípadne všetky ďalšie symboly, ktoré využijete pri behu TS,
4. δ – prechodová funkcia, tu nastáva zmena – v prechodovej funkcii TS máme trojicu *čo_čítame, čo_zapisujeme, kam_sa_hýbeme*. Pohybovať sa vieme po páske doprava R, doľava L, alebo na nej vieme stáť N.
5. q_0 – počiatočný stav, v počiatočnom stave je čítacia hlava na $\not{c}$,
6. q_{accept} – akceptujúci stav – ak výpočet skončí v tomto stave, tak slovo akceptujeme a výpočet ďalej nepokračujeme (rovnaké ako *return true* pri programovaní),
7. q_{reject} – zamietajúci stav – ak výpočet skončí v tomto stave, tak slovo zamietneme a výpočet ďalej nepokračujeme (rovnaké ako *return false* pri programovaní).

Ako vyzerá TS na začiatku? Na páske máme $\not{c}w\sqcup\sqcup\sqcup$... – čiže na začiatku pásky je cent, pred cent nevieme ísť, cent nevieme prepísať na niečo iné a ani nič na páske nevieme prepísať na cent (tým by sme akoby pásku odstrihli). w je vstupné slovo nad abecedou Σ, a nasleduje nekonečno blankov $\sqcup$. To sú prázdne miesta na páske, kam môžeme písať, a vieme ich využívať na rôzne pomôcné výpočty.

Čítacia hlava je na cente a sme vo vstupnom stave.

1. príklad - TS počítajúce funkcie

Zostrojte Turingov stroj počítajúci funkciu, ktorá:

(a) na vstupe dostane slovo a^n a po výpočte na páske zostane a^{n+1}

(b) na vstupe dostane a^n a vráti b^n;

(c)* na vstupe dostane $a^x\#a^y$ a vráti a^{x+y};

(d) na vstupe dostane $a^x\#a^y$ a vráti a^{x-y}, pričom predpokladáme, že $x \geq y$;

(e)* na vstupe dostane a^n a vráti a^{2n};

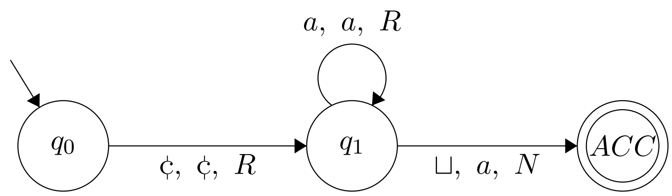
Riešenie 1. príkladu

Ako začať pri konštruovaní TS? Musíme si najprv premyslieť stratégiu, čiže ako budeme postupovať, kedy sa čo stane... Je vhodné, ak si túto stratégiu napíšeme v bodoch. Následne sa treba zamyslieť nad tým, či sme pokryli všetky (dakedy aj okrajové) prípady, a ak nie, tak ich doplniť. Z definície TS vieme, že jeho prechody obsahujú výrazne viac vecí, ako konečné automaty – potrebujeme vedieť, čo na páske čítame, kam na nej posunieme čítaciu hlavu (doľava, doprava, alebo bude stáť) a čo na pásku (na to isté políčko) zapíšeme. Preto medzi každým stavom budeme musieť myslieť na všetky tri tieto akcie. Ukážme si to na príkladoch.

Príklad (a): zo zadania je jasné, že máme počet áčok na páske zvýšiť o jedna. Ako vyzerá páska na začiatku? Máme ¢, potom niekoľko a-čok a následne nekonečno veľa blankov $\sqcup$. Náš postup by preto mohol byť taký, že budeme čítať áčka a budeme sa hýbať doprava, až kým neprídeme na prvý blank. Ten prepíšeme na a a akceptujeme. Pri tomto type TS nepotrebujeme zamietací stav.

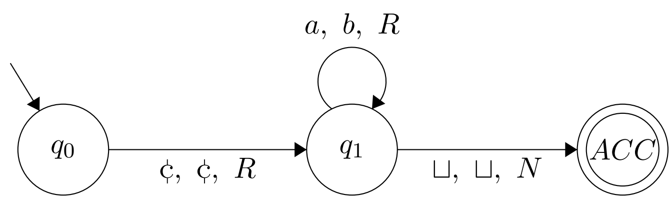
Takže, potrebujeme vstupný stav, tam prečítame cent a posunieme sa doprava na áčka[1]. Tam sa budeme „točiť" – čítať áčka, posúvať sa doprava, a áčka necháme na páske (t.j. ich „prepíšeme na a"). Keď prečítame blank, prepíšeme ho na a, čítacia hlava zostane stáť a presunieme sa do akceptačného stavu. Výsledný TS je na obrázku.

[1]Pozor, cent pri TS NIKDY neprepisujeme, a ideálne, ani nič neprepisujeme na cent, keďže tým by sme akoby „odstihli" pásku.



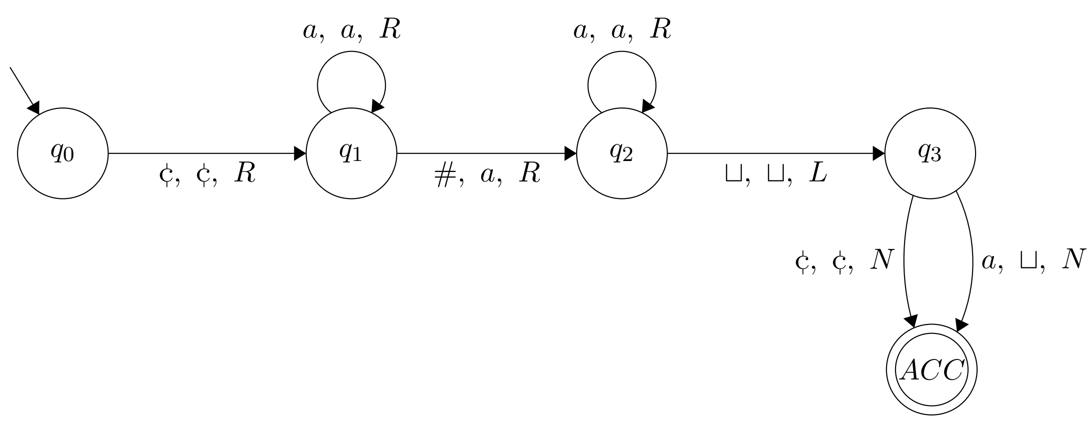
Príklad (b): v tomto príklade máme áčka prepísať na béčka. To je pomerne jednoduché. Vždy, keď prečítame áčko, prepíšeme ho na béčko a posunieme sa doprava. Toto opakujeme, kým neprečítame blank. Na prvom blanku môžeme slovo akceptovať.

Výsledný TS je na obrázku. Ako by sme museli zmeniť TS, ak by na vstupe bolo slovo nad abecedou $\{a, b\}$ a chceli by sme prepísať áčka na béčka? A čo by sme chceli zameniť áčka za béčka a béčka za áčka?



Príklad (c): na vstupe dostaneme napríklad slovo $aa\#aaa$ a mali by sme vrátiť $aaaaa$. Jedna z možností je, že mriežku nahradíme znakom a a posledný znak vymažeme (zmeníme na $\sqcup$). Ako nájdeme posledný znak a? Bude naľavo od prvého blanku.

Môže sa stať, že pred blankom bude rovno cent. Kedy? Ak by sme mali na vstupe iba mriežku, čiže n aj m by boli 0. Zamyslite sa, či tento náš TS správne vyrieši situácie, keď iba jedno bude rovné 0.



2. príklad - Obyčajné TS

Zostrojte Turingov stroj, ktorý vracia TRUE/FALSE (teda apkceptuje alebo zamieta), podľa toho, či slovo na páske patrí do jazyka:

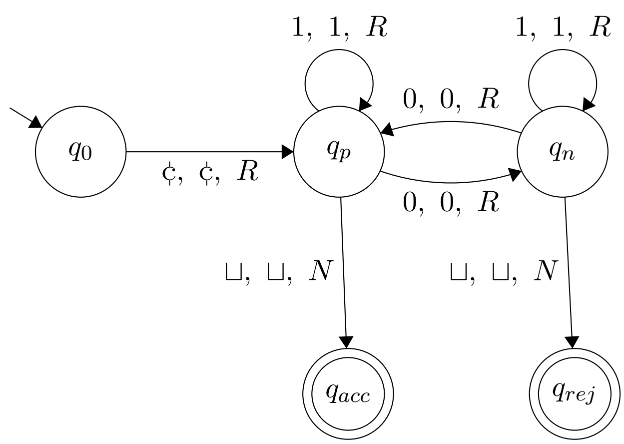
(a) $L_1 = \{|w|_0 \; mod \; 2 = 0 \mid w \in \{0,1\}^*\}$

(b)* $L_2 = \{|w|_0 \; mod \; 3 = 1 \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Riešenie 2. príkladu

Riešenie 2(a): jazyk L_1 je určite regulárny, čo znamená, že vieme vytvoriť DKA, ktorý ho bude rozoznávať. Ten vieme veľmi ľahko prerobiť na TS, v ktorom nepotrebujeme nič zapisovať. Zmena oproti DKA je tá, že na konci slova máme blank. A ten môže byť na konci slova z jazyka – vtedy slovo akceptujeme, takže pôjde do stavu q_{accept}, a ak slovo z jazyka nebude, skončí v stave q_{reject}.

Z obrázku vidíme, že sme museli pridať iba tieto dva stavy a vstup, kde sme prečítali cent.



Čo myslíte, vieme každý DKA prerobiť na TS? Vieme zostrojiť TS pre každý regulárny jazyk?