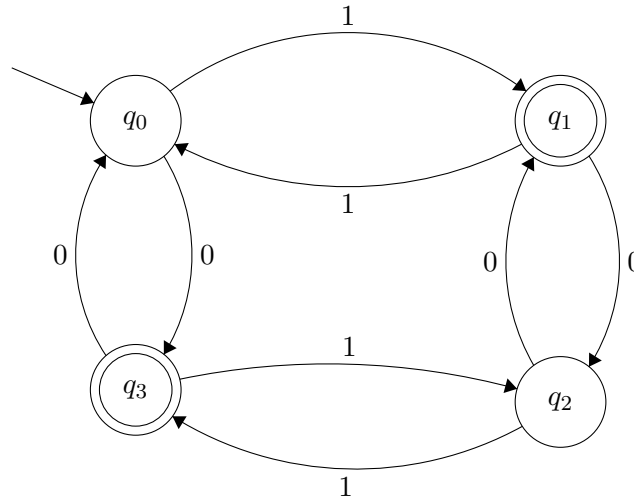


## 1. príklad

Aký jazyk rozpoznáva automat na obrázku? Dokážte to.



### Idea riešenia 1. príkladu

Skúsme zistiť, aký jazyk rozpoznáva daný automat. V stave  $q_0$  skončí určité prázdne slovo. Koľko jednotiek bude obsahovať slovo, ktoré skončí v  $q_0$ ? Vieme sa tam dostať cez stav  $q_1$ , pričom na ceste  $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0$  bude vždy párny počet jednotiek, hocikolkokrát túto cestu zopakujeme. Môžeme prejsť až do  $q_2$ , ale všimnime si, že či sa do  $q_0$  vrátíme zo stavu  $q_3$  alebo  $q_1$ , vždy prejdeme po párnom počte jednotiek (jednou vychádzame a druhou vchádzame). Rovnako to je pre  $q_0$  s nulami – buď pôjdeme do  $q_3$  a späť, čo vždy dá párny počet núl, alebo pôjdeme cez stav  $q_2$  a opäť budeme potrebovať párny počet núl. V stave  $q_0$  by tak mali končiť slová, ktoré majú párny počet núl a párny počet jednotiek. To vieme zapísať ako  $KL[q_0] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 0\}$

Ako sa vieme dostať do  $q_1$ ? Buď priamo z  $q_0$  a na ceste prečítame jednu jednotku, alebo pôjdeme cez  $q_3$  a na ceste prečítame jednu jednotku a dve nuly. Hocijaký iný okruh, ktorý z  $q_1$  spravíme, bude obsahovať párny počet núl aj jednotiek. To spočítané s tými, ktoré sme spravili pri prvom prechode do  $q_1$  nám dáva nepárny počet jednotiek a párny počet núl. Čiže:  $KL[q_1] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Do  $q_3$  sa vieme dostať priamo z  $q_0$  po jednej nule, alebo cez zvyšné stavy po dvoch jednotkách a jednej nule. Tiež tu platí to, čo v predchádzajúcich stavoch, ak z  $q_3$  pôjdeme do iného stavu a späť, prečítame párny počet núl

a/alebo párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že v tomto stave skončia slová, ktoré majú nepárny počet núl a párny počet jednotiek.  $KL[q_3] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 1 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 0\}$ .

A čo stav  $q_2$ ? Keď sa pozrieme na KL triedy zvyšných stavov, vidíme že nám chýbajú ešte slová, ktoré majú nepárny počet núl a nepárny počet jednotiek. Skontrolujme. Do  $q_2$  sa vieme dostať cez  $q_1$  prečítaním jednej jednotky a jednej nuly, alebo cez  $q_3$  tiež prečítaním jednej nuly a jednej jednotky. Takže  $KL[q_2] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 1 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Z toho vyplýva, že  $L(M) = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Dokážte, že to platí.

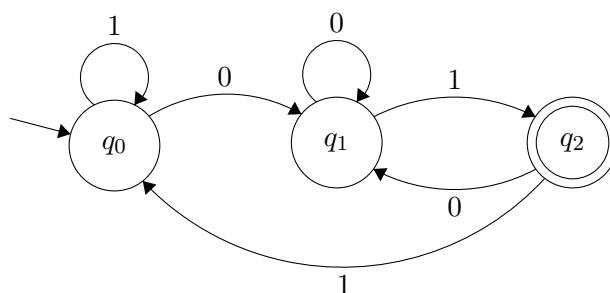
## 2. príklad

Zostrojte DKA, ktorý rozoznáva jazyk  $L$  a dokážte jeho správnosť/dokážte, že ste zostrojili automat s minimálnym počtom stavov.

- (a)  $L_1 = \{ax \mid x \in \{a, b\}^*\}$
- (b)  $L_2 = \{1, 00, 01\}$ ;  $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$
- (c)  $L_3 = \{awb \mid w \in \{a, b\}^*\}$ .
- (d)  $L_4 = \{w \mid |w|_b \bmod 2 = 1; w \in \{a, b, c\}^*\}$

## 3. príklad

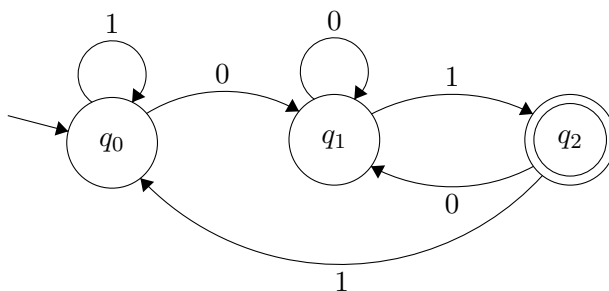
- (a)\* Zostrojte automat pre jazyk  $L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$ .
  - (i) Dokážte jeho správnosť a určite KL triedy.
  - (ii) Aký minimálny počet stavov musí mať? Dokážte.
- (b) Pozrite sa na automat  $A$  na obrázku a:
  - (i) zistite, aký jazyk rozoznáva,
  - (ii) určite KL triedy všetkých stavov,
  - (iii) dokážte, že automat rozoznávajúci jazyk na obrázku musí mať aspoň tri stavy.



#### 4. príklad

Pozrite sa na automat  $A$  na obrázku a:

- zistíte, aký jazyk rozoznáva,
- určíte KL triedy všetkých stavov,
- dokážte, že automat rozoznávajúci jazyk na obrázku musí mať aspoň tri stavy.



#### Riešenie príkladu 4

Podme postupne po podúlohách.

- Ako zistiť, aký jazyk automat rozoznáva? Skúsme si vypísať niekoľko slov, ktoré skončia v akceptačnom stave.

Sú to napríklad slová: 01, 101, 1101, 0001, 1001, 0101.... Čo majú tieto slová spoločné? Všetky z nich majú suffix 01. Ale budú ho mať všetky slová, ktoré skončia v  $q_2$ ?

Pozrime sa, ako sa do  $q_2$  vieme dostať. Jediný prechod, ktorý v  $q_2$  končí, je prechod z  $q_1$  po 1. Takže slová určite budú končiť 1. Do  $q_1$  sa zas vieme dostať iba po 0 a to zo všetkých troch stavov. Takže áno,

všetky slová končiace v  $q_2$  musia obsahovať na konci 01. Najkratšie akceptované slovo je práve 01, výsledný jazyk môžeme zapísať ako:

$$L(A) = \{w01 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

- (ii) Máme jazyk, takže máme aj  $KL[q_2]$ , poďme zistiť zvyšné dve. Je vhodné zachovávať rovnaký zápis tried, preto sa pri stavoch  $q_0$  a  $q_1$  zamyslíme, aký sufix budú mať slová, ktoré v nich skončia.

Jednoduchší je asi stav  $q_1$ , lebo doňho vedie iba jeden prechod a to z  $q_0$  po 0. Takže v  $q_1$  skončia slová so sufixom 0. Je táto množina disjunktná s  $KL[q_2]$  čiže  $L(A)$ ? Áno. Zapíšme ju.

$$KL[q_1] = \{w0 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

No a čo so stavom  $q_0$ ? Vieme, že tam skončí  $\lambda$ , slová z  $\{1\}^*$ , no ale aj také, čo prejdú všetkými stavmi a z  $q_2$  sa vrátia po 1. Najjednoduchšie by bolo povedať, že sú to slová so sufixom 1, ale bola by takáto množina disjunktná s  $KL[q_2]$ ? Alebo inak – existuje slovo, ktoré má aj sufix 01, aj 1? Samozrejme, napríklad najkratšie také slovo 01. Takže zjavne tieto množiny disjunktné nie sú.

Čím budú končiť slová, ktoré sa do  $q_0$  dostanú z  $q_2$ ? 1 a pred ňou môže byť iba 1, keďže to je jediný prechod do  $q_2$ , takže tieto slová budú mať sufix 11. Zapíšme to všetko.

$$KL[q_0] = \{\lambda\} \cup \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{w11 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

Vieme tento zápis zjednodušiť? Ktoré slová z prvých dvoch jazykov nepokrýva posledný jazyk? Iba  $\lambda, 1$ . Takže to upravíme a napíšeme všetky KL triedy:

$$KL[q_0] = \{\lambda, 1; w11 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$KL[q_1] = \{w0 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$KL[q_2] = \{w01 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

- (iii) Máme dokázať, že automat rozoznávajúci tento jazyk musí mať aspoň tri stavy. Dokazujeme sporom, t. j. predpokladáme, že automat môže mať aj menej ako tri stavy. (Čo to znamená? Že vieme nejaké dva stavy zlúčiť. Poďme ukázať, že to nejde.)

Z každej KL triedy si zvolíme ľubovoľné slovo, napríklad 011, 00, 101. Pre každú dvojicu ideme zistiť, či môžu skončiť v rovnakom stave.

- (i) Nech  $\hat{\delta}(q_0, 011) = \hat{\delta}(q_0, 00)$ . Potom, z Lémy 3.12 musí platiť, že keď k nim pridáme hocikaké slovo, oba skončia v rovnakom stave, a teda buď obe slová budú z jazyka alebo obe slová nebudú z jazyka. Čiže  $\hat{\delta}(q_0, 011x) = \hat{\delta}(q_0, 00x)$ ,  $011x \in L(A) \iff 00x \in L(A)$ .

Aby sme ukázali, že tieto slová nemôžu skončiť v jednom stave, hľadáme  $x$ , ktoré túto rovnosť poruší. Existuje také?

Skúsme napríklad iba jednoduché slovo 1.  $\hat{\delta}(q_0, 0111) = \hat{\delta}(q_0, 001)$ . Vidíme, že  $0111 \notin L(A)$  ale  $001 \in L(A)$ . Z toho vyplýva, že slová 011 a 00 nemôžu skončiť v jednom stave a preto nevieme zlúčiť stavy  $q_0$  a  $q_1$ .

- (ii) Nech  $\hat{\delta}(q_0, 011) = \hat{\delta}(q_0, 101)$ . Tu vidíme, že už toto tvrdenie nemôže platiť, keďže  $011 \notin L(A)$  ale  $101 \in L(A)$ . Tieto slová nemôžu skončiť v rovnakom stave (t.j. nevieme zlúčiť stavy  $q_0$  a  $q_2$ .)
- (iii) Posledná kombinácia: nech  $\hat{\delta}(q_0, 00) = \hat{\delta}(q_0, 101)$ . Opäť neplatí priamo toto tvrdenie, pretože  $00 \notin L(A)$  ale  $101 \in L(A)$ . Tieto slová tak nemôžu skončiť v rovnakom stave (t.j. nevieme zlúčiť stavy  $q_1$  a  $q_2$ .)

Dospeli sme k sporu s tvrdením, že automat môže mať menej ako tri stavy, takže platí pôvodné tvrdenie. Automat rozoznávajúci jazyk  $L(A) = \{w01 \mid w \in \{0, 1\}^*\}$  musí mať aspoň 3 stavy.

## Poznámky

### KL triedy

- Musíme zadefinovať KL pre každý stav automatu.
- Zjednotenie KL tried pre všetky stavy sa musí rovnať  $\Sigma^*$ .
- Zjednotenie KL tried pre akceptačné stavy sa musí rovnať jazyku, ktorý automat rozoznáva.
- Teda - každé slovo nad abecedou musí patriť do nejakej KL triedy, a každé slovo z jazyka, ktorý automat rozoznáva, musí patriť do KL triedy jedného z akceptačných stavov.
- Prienik akýchkoľvek dvoch KL tried je prázdna množina - t.j. KL triedy sú disjunktné množiny.

**Dôkaz minimálneho počtu stavov pre automat:**

- Z každej KL triedy (pre každý stav) si zvolíme jedno slovo, ktoré do nej patrí.
- Dokazujeme sporom: *Automat môže mať aj menej ako  $n$  stavov.*
- Využijeme Lému 3.12. Pre každú dvojicu slov zistujeme, či môžu skončiť v rovnakom stave. Môžu nastať dva prípady:
  - i) jedno slovo do jazyka patrí a druhé nie, takže priamo sme dokázali, že nemôžu skončiť v rovnakom stave,
  - ii) alebo po „prilepení“ vhodného sufixu bude jedno slovo patriť do jazyka, ale druhé nie.
- Keď nám pre všetky dvojice (tj. pre  $\binom{n}{2}$  kombinácií) vyjde, že slová nemôžu skončiť v rovnakom stave, dospeli sme k sporu s tvrdením a teda platí pôvodné tvrdenie *Automat musí mať aspoň  $n$  stavov.*
- Ak náhodou vyjde, že nejaké dve slová by mohli skončiť v rovnakom stave, skúste automat prerobiť - možno môže byť aj menší ako ste si pôvodne mysleli :).