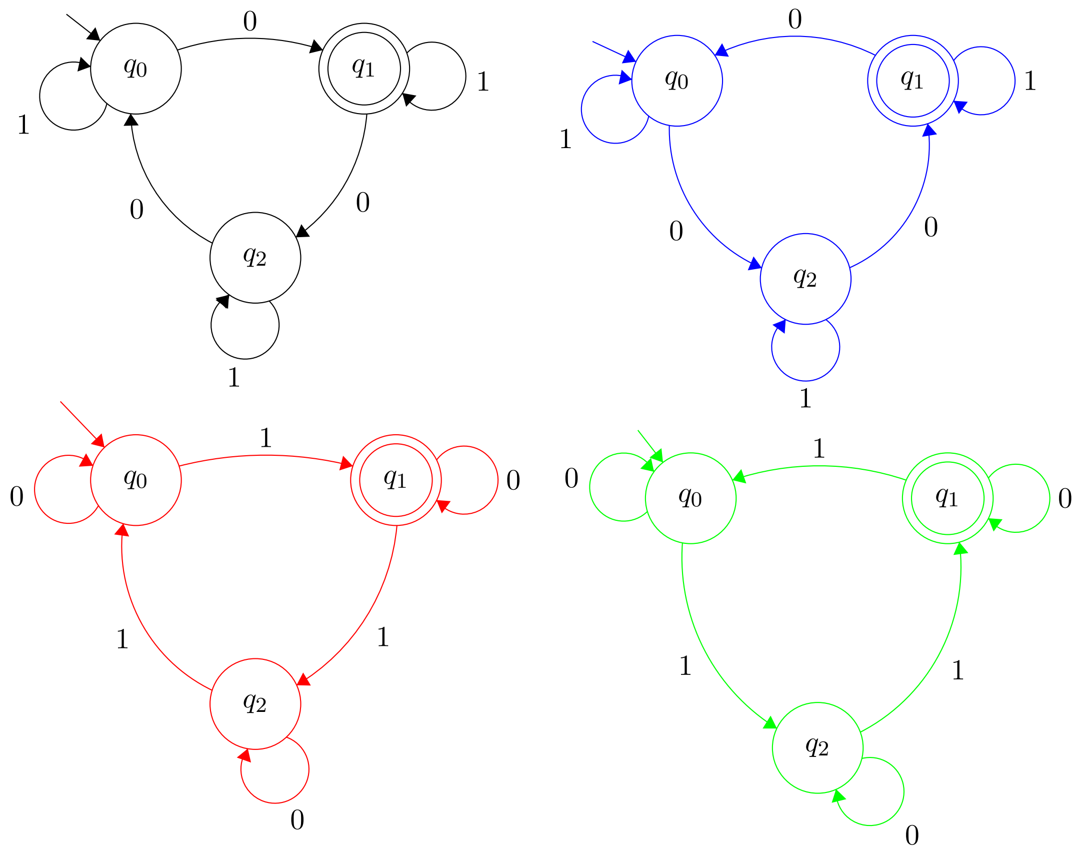
1. príklad*

Na obrázku sa nachádzajú 4 automaty rozoznávajúce rôzne jazyky. Pre každý z nich zistite, aký jazyk rozoznáva a určite KL množiny všetkých stavov. Čo znázorňujú dolné indexy stavov v čiernom a červenom automate?



Riešenie príkladu 1

Všetky štyri automaty pracujú nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) **Čierny automat** rozoznáva jazyk $L_{black} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 1\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda;\; w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 1\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 2\}$

(b) **Modrý automat** rozoznáva jazyk $L_{blue} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 2\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; \; w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 2\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \; mod \; 3 = 1\}$

(c) **Červený automat** rozoznáva jazyk $L_{red} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 1\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; \; w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 1\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 2\}$

(d) **Zelený automat** rozoznáva jazyk $L_{green} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 2\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; \; w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 2\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \; mod \; 3 = 1\}$

Vidíme, že indexy stavov v červenom a čiernom automate značia zvyšky po delení. Samozrejme, aj modrý a zelený automat je správny, ale pre ľahšiu orientáciu a pre dokazovanie je vhodné používať jasné označovanie, ktoré vám priamo napovedá, čo sa v stave deje. Uvidíme to v ďalších príkladoch.

Zamyslite sa ešte nad tým, či je potrebné písať λ pri týcho KL množinách. Svoju odpoveď skúste zdôvodniť.

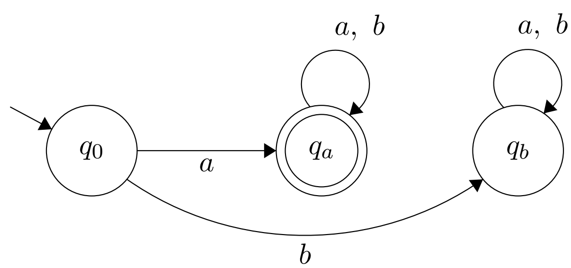
2. príklad

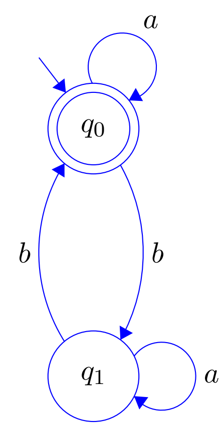
Zostrojte automat, ktorý rozoznáva jazyk $L = \{w = ax \mid x \in \{a,b\}^* \wedge |w|_b \; mod \; 2 = 0\}$. Z akých dvoch jazykov je L zložený? Pre každý zostrojte automat, dokážte ich správnosť, a pomocou modulárnej konštrukcie (simulácie) vytvorte automat pre jazyk L.

Riešenie príkladu 2

Tento jazyk sa skladá z dvoch jazykov, označme ich L_1 a L_2. $L_1 = \{w = ax \mid x \in \{a,b\}^*\}$; $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \; mod \; 2 = 0\}$.

Najprv si pre každý z nich vytvoríme automat. Aby sa nám s automatmi ľahšie ďalej pracovalo, budeme sa snažiť označovať stavy podľa toho, čo sa v nich deje, a tiež sa vyvarovať veľa stavom s rovnakými menami.





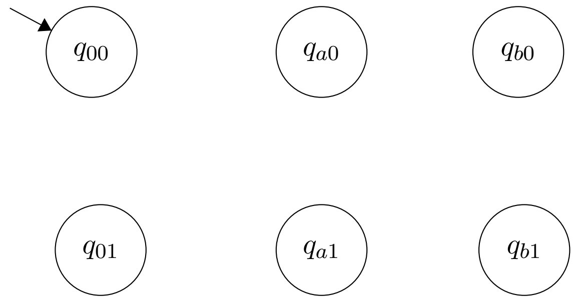
Vznikli dva automaty, pre každý si definujme KL triedy.

- **Čierny automat:** $L_1 = \{ax \mid x \in \{a,b\}^*\}$
  - $KL[q_0] = \{\lambda\}$
  - $KL[q_a] = \{ax \mid x \in \{a,b\}^*\}$ – čiže slová začínajúce znakom a
  - $KL[q_b] = \{bx \mid x \in \{a,b\}^*\}$ – čiže slová začínajúce znakom b
- **Modrý automat:** $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \; mod \; 2 = 0\}$
  - $KL[q_0] = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \; mod \; 2 = 0\}$ – párny počet béčok
  - $KL[q_1] = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \; mod \; 2 = 1\}$ – nepárny počet béčok

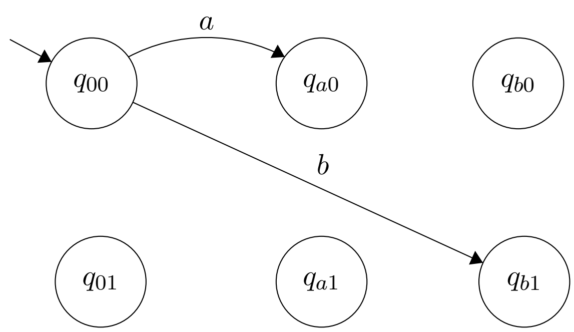
Dôkazy správnosti nechávam na vás ako opakovanie posledného cvičenia.

Poďme si spraviť modulárnu konštrukciu. Možno ste rozmýšľali, prečo má jeden automat všetky stavy v jednom riadku a druhý v jednom stĺpci. Je to preto, aby sa nám ľahko spravil kartézsky súčin stavov. Postup je nasledovný:

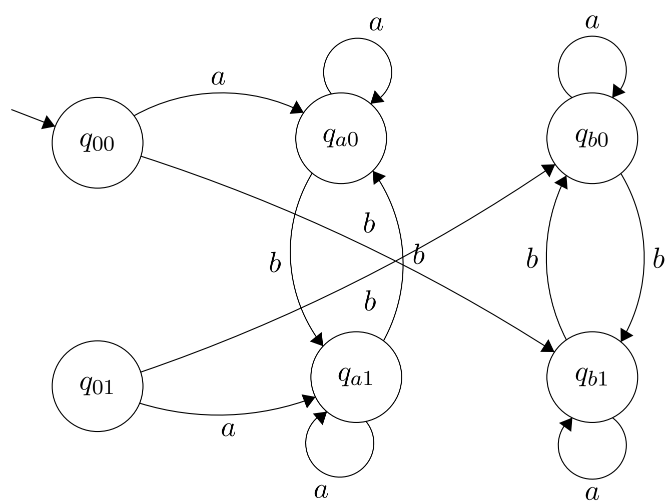
(i) Potrebujeme 3×2 stavov, každý bude mať dvojznakový index, kde prvý znak bude z čierneho automatu a druhý z modrého. Vieme, že vstupný stav bude ten, ktorý bol vstupný v oboch, v tomto prípade teda q_{00}.



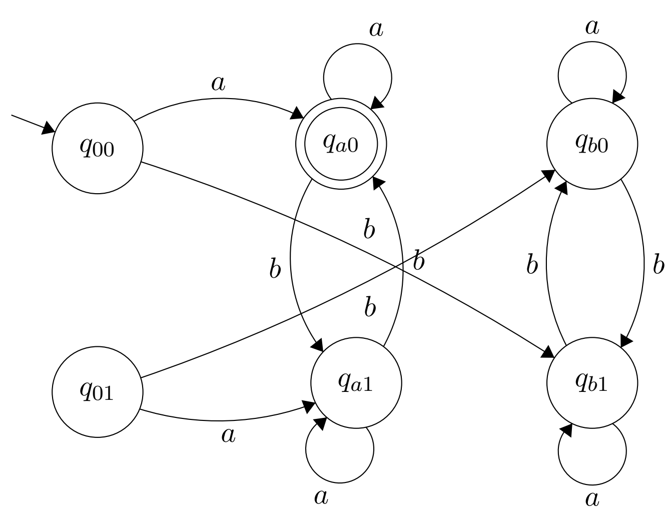
(ii) Teraz potrebujeme pridať prechody. Ako na to? Pozrime sa na prechody zo stavu q_{00}. V čiernom automate sa po a dostaneme zo stavu q_0 do stavu q_a a v modrom automate sa z q_0 dostaneme po a do q_0. Takže zo stavu q_{00} po a pôjde prechod do stavu q_{a0}. Podobne pre prechod po b – v čiernom automate sa zo stavu q_0 dostaneme do stavu q_b a v modrom automate sa z q_0 dostaneme do q_1. Z toho vyplýva, že zo stavu q_{00} po b pôjde prechod do stavu q_{b1}.



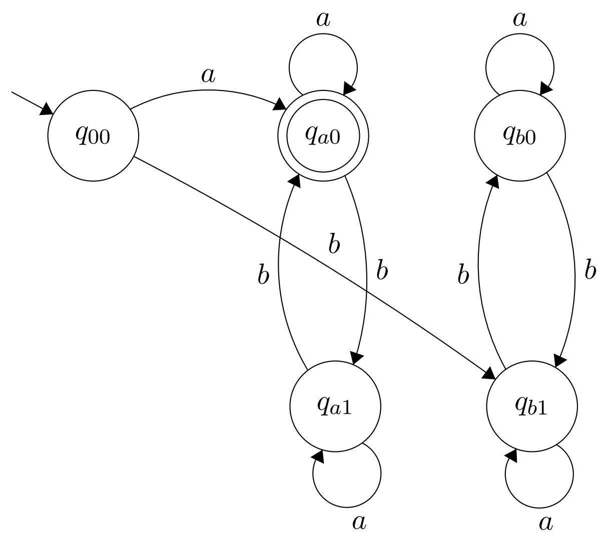
(iii) Všeobecnejšie: aby sme zistili prechod zo stavu q_{ij} po znaku e, tak najprv pozrieme, kam sa dostaneme zo stavu q_i po e v prvom automate (napr. do stavu q_k) a potom kam sa dostaneme zo stavu q_j po e v druhom automate (napr. do stavu q_l). Kombináciou výsledkov dostaneme výsledný stav (q_{kl}). Doplňme aj zvyšok prechodov v našom automate.



(iv) Keď už máme všetky prechody, ešte musíme určiť, ktoré stavy sú akceptačné. Keďže robíme prienik dvoch automatov (vo výslednom jazyku je medzi L_1 a L_2 „a zároveň”), akceptačné stavy budú tie, ktoré sú akceptačné aj v jednom aj v druhom automate. V našom prípade to je iba stav q_{a0}.



(v) Pozrite sa na automat. Sú v ňom všetky stavy dosiahnuteľné (teda sa do nich vieme počas výpočtu dostať)? Vidíme, že do stavu q_{01} sa dostať nedá. Ale prečo? Ak si spomenieme na $KL[q_0]$ z čierneho a $KL[q_1]$ modrého automatu, získame odpoveď. Neexistuje totiž žiadne slovo, ktoré je zároveň prázdne a zároveň má nepárny počet béčok. Tento stav aj s prislúchajúcimi prechodmi preto nemusíme kresliť.



(vi) Ešte si definujme KL triedy tohto automatu.

- $KL[q_{00}] = \{\lambda\}$
- $KL[q_{a0}] = \{w = ax \mid |w|_b \ mod\ 2 = 0\}$ – slová začínajúce a s párnym počtom b
- $KL[q_{b0}] = \{w = bx \mid |w|_b \ mod\ 2 = 0\}$ – slová začínajúce b s párnym počtom b
- $KL[q_{a1}] = \{w = ax \mid |w|_b \ mod\ 2 = 1\}$ – slová začínajúce a s nepárnym počtom b
- $KL[q_{b1}] = \{w = bx \mid |w|_b \ mod\ 2 = 1\}$ – slová začínajúce b s nepárnym počtom b

Pozrite sa na KL triedy pôvodného modrého a čierneho automatu vyššie. Ako súvisia s KL triedami tohto automatu? Vidíte tam prienik jazykov? Ako by sa zmenil automat, keby sme nerobili prienik, ale zjednotenie (t.j. v pôvodnom jazyku by bolo „alebo")? Zmenili by sa iba akceptačné stavy. Zamyslite sa, ktoré ďalšie stavy by boli v tomto prípade akceptačné.

Ak ste dokázali správnosť oboch automatov čierneho aj modrého, tak správnosť tohto už dokazovať nemusíte.

3. príklad

Zostrojte automat, ktorý rozoznáva jazyk $L = \{w = x0 \mid x \in \{0,1\}^* \wedge |w|_1 \ mod \ 3 = 0\}$. Z akých dvoch jazykov je L zložený? Pre každý zostrojte automat, dokážte ich správnosť, a pomocou modulárnej konštrukcie (simulácie) vytvorte automat pre jazyk L.

4. príklad

Pomocou modulárnej konštrukcie (simulácie) zostrojte automat pre jazyk:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ počet } a \text{ je párny a zároveň neobsahuje podslovo } ba\}.$$

Vieme tento automat zostrojiť použitím modulárnej konštrukcie pre rozdiel dvoch automatov? Aký bude ten druhý jazyk? Dokážte správnosť oboch automaty (nezabudnite ukázať, že každé slovo patrí do KL triedy stavu, v ktorom skončí).

Poznámky

Modulárna konštrukcia

- Najprv treba zostrojiť oba automaty, z ktorých budeme skladať výsledný.
- Potom dokázať správnosť oboch automatov – t.j. že rozoznávajú jazyk, ktorý majú.
- Keď sme to dokázali, spravíme modulárnu konštrukciu (simuláciu). Budeme potrebovať $n \times m$ stavov, ak n je počet stavov jedného automatu a m je počet stavov druhého. Odporúčam nové stavy indexovať kombináciou indexov z pôvodných automatov.
- Vstupným stavom bude taký stav, ktorý bol v oboch automatoch vstupný.

- Kam ide prechod zo stavu q_{ij} po znaku e zistíme tak, že sa najprv pozrieme, kam sa dostaneme zo stavu q_i po e v prvom automate (napr. do stavu q_k) a potom kam sa dostaneme zo stavu q_j po e v druhom automate (napr. do stavu q_l). Kombináciou výsledkov dostaneme výsledný stav (q_{kl}).
- Akceptačné stavy budú:
  (i) Ak robíme *prienik* automatov, tak všetky ktoré sú akceptačné pre *oba* automaty.
  (ii) Ak robíme *zjednotenie* automatov, tak všetky, ktoré sú akceptačné *aspoň pre jeden* automat.
  (iii) Ak robíme *rozdiel* automatov, tak všetky, pre ktoré je *prvý akceptačný a druhý nie.*
- Výsledný automat už dokazovať nemusíme.