1. príklad

(a) Pozrime sa na homomorfizmy. Máme abecedy $\Sigma = \{0, 1\}$ a $\Gamma = \{a, b\}$. Homomorfizmus h_1 je definovaný takto:

$$\begin{aligned} h_1 : \Sigma^* &\to \Gamma^* \\ h_1(0) &= aa \\ h_1(1) &= a \end{aligned}$$

(i) $L_0 = \{0, 01, 001, 111\}$, čomu je rovné $h_1(L_0)$?

(ii) $L_a = \{aa, aaa, baa\}$, čomu je rovné $h_1^{-1}(L_a)$?

(b) Majme homomorfizmus h definovaný takto:

$$\begin{aligned} h : \Sigma^* &\to \Gamma^* \\ h(0) &= ab \\ h(1) &= b \end{aligned}$$

Zistite čomu je rovné:

(i) $h(001001)$

(ii) $h^{-1}(ababbb)$

(iii) $h^{-1}(baba)$

(iv) $L_1 = \{0, 1, 110, 001\}$
$h(L_1)$

(v) $L_2 = \{ab, bb, bab\}$
$h^{-1}(L_2)$

(vi) $L_3 = \{aaa, aba\}$
$h^{-1}(L_3)$

(vii) $L_4 = \{abb, baa\}$
$h^{-1}(L_4)$

Riešenie 1. príkladu

(a) Ako fungujú homomorfizmy? Homomorfizmus zobrazuje znaky na slová (preto pre definovaní homomorfizmu musíme povedať, na čo sa zobrazí každý znak z abecedy). Slovo sa v homomorfizme zobrazí na slovo (pre každý vzor existuje iba jeden jeho obraz), jazyk na jazyk. Pri inverznom homomorfizme sa môže stať, že jedno slovo vzniklo z rôznych slov, čiže pre toto slovo bude viac jeho vzorov (jeden obraz mohol vzniknúť z viacerých vzorov). Inverzný homomorfizmus slova preto bude jazyk, a inverzný homomorfizmus jazyka zjednotenie jazykov inverzného homomorfizmu pre všetky slová.

(i) $h_1(L_0) = \{aa, aaa, aaaaa\}$ - slovo aaa vzniklo aj ako $h1(01)$, aj ako $h1(111)$, ale jazyk je množina, preto ho uvádzame iba raz.

(ii) $h_1^{-1}(L_a) = \{0, 11, 01, 10, 111\}$ Prvé slovo mohlo vzniknúť tromi spôsobmi, druhé slovo dvoma, slovo baa vzniknúť nemohlo.

(b) Postupujeme rovnako ako v (a).

(i) $h(001001) = ababbababb$

(ii) $h^{-1}(ababbb) = \{0011\}$

(iii) $h^{-1}(baba) = \{\}$

(iv) $h(L_1) = \{ab, b, bbab, ababb\}$

(v) $h^{-1}(L_2) = \{0, 11, 10\}$

(vi) $h^{-1}(L_3) = \{\}$

(vii) $h^{-1}(L_4) = \{01\}$

2. príklad

Skonštruujme automat, ktorý ponúka tri nápoje (Kávu, Čaj, Mlieko), pričom každý z nich stojí 1,5 €. Automat berie 50-centové a 1-eurové mince, výdavok nevracia. Tlačidlo pre výber nápoja vieme stlačiť hocikedy, ale nápoj nám automat vydá jedine vtedy, ak stlačíme tlačidlo potom, ako sme už vhodili 1,5 €.

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
STAV	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
VSTUP	50c	50c	50c	K	λ
VÝSTUP	nič	nič	nič	nič	nápoj

Tabuľka 1: Správanie automatu pri vhodení 3x50c mincí a výbere kávy

(a) Nakreslite podľa tabuliek stavový diagram pre automat. Ktoré prechody tam musíme dokresliť, aby bol deterministický?

	t_0	t_1	t_2	t_3
STAV	q_0	q_2	q_3	q_4
VSTUP	1€	50c	Č	λ
VÝSTUP	nič	nič	nič	nápoj

Tabuľka 2: Správanie automatu pri vhodení 1€, 50c a výbere čaju

(b) Definujte automat pomocou pätice z prednášky.

(c) Aká bude počiatočná konfigurácia pre prípady z tabuliek?

(d) Odsimulujte výpočet pre obe konfigurácie.

(e) Odsimulujte výpočet pre nejaký ďalší prípad. Je to akceptujúci alebo zamietajúci výpočet?

(f) Čo by sme museli zmeniť v automate, aby vracal výdavok? Čo by si musel automat pamätať a ako to vieme zabezpečiť?

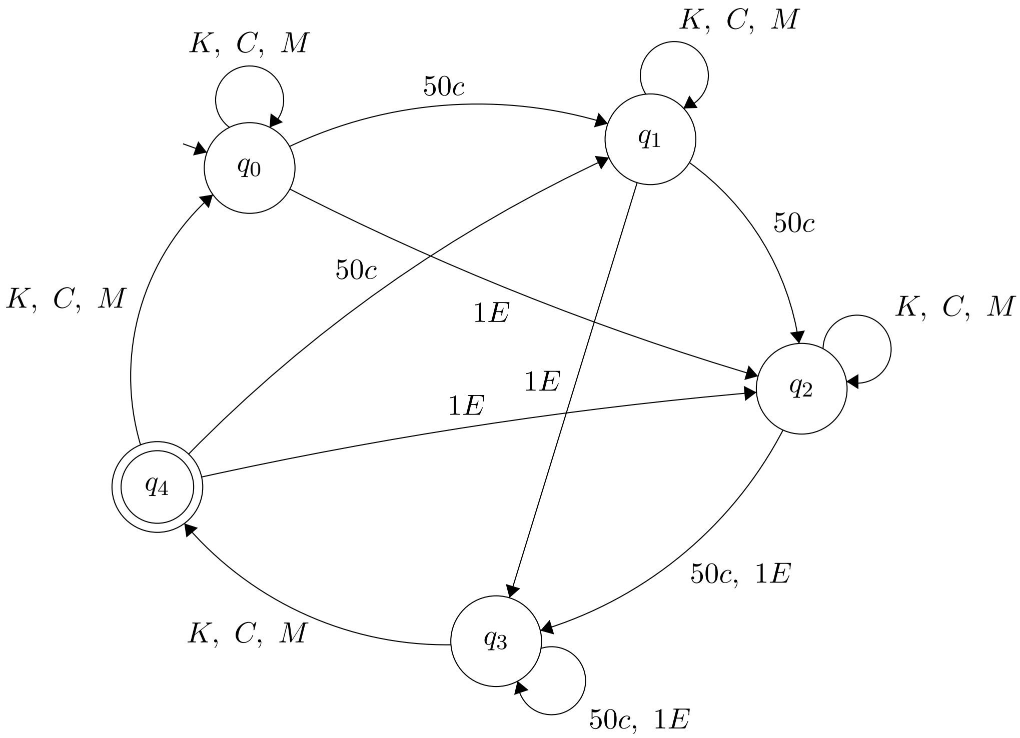
Riešenie 2. príkladu

(a) Pozrime sa najprv na tabuľky. V prvej vidíme, že sme začali v stave q_0, vhodili 50c, automat ešte nič nevrátil, ale posunul sa do stavu q_1. Tam sme opäť vhodili 50c, posunuli sme sa do stavu q_2. Ešte raz sme vhodili 50c, posunuli sa do stavu q_3. Tam sme stačili tlačidlo Káva, automat sa posunul do stavu q_4 a vydal nám nápoj. V druhej tabuľke sme preskočili stav q_1, lebo sme rovno hodili 1€. Keď sa nad tým zamyslíme, zistíme, čo znamenajú jednotlivé stavy.

Stav q_0 je vstupný (začiatočný), v ktorom ešte automat neeviduje žiadne vhodené mince. V stavoch q_1, q_2, q_3 sa nachádza, ak sme doň už hodili 50 centov, 1 € alebo 1,5 €. Nápoj vydáva v stave q_4, ak sme už hodili 1,5 € (a teda boli v stave q_3) a vybrali si nápoj. Ak tlačidlo pre ľubovoľný nápoj stlačíme v inom stave, automat sa neposunie do iného stavu, keďže suma vhodených peňazí sa nezmení. Čo ak hodíme viac ako 1,5 €? Podľa zadania automat čaká, kým stlačíme tlačidlo s voľbou nápoja, čiže hocijakú sumu nad 1,5 € budeme brať ako 1,5 € a stav automatu sa meniť nebude.

Čo sa stane, keď už vydáme nápoj a stlačíme opäť nejaké iné tlačidlo? Ak by sa stav automatu nezmenil, stačilo by raz vhodiť 1,5 € a mali by sme nekonečné nápoje[1], preto sa musíme niekam posunúť. Keďže

[1] čomu by sa asi prevádzkovateľ automatu nepotešil



Obr. 1: Automat vydávajúci nápoje, ktoré stoja 1,5 €

aktuálny stav vhodených mincí je 0 centov, posunieme sa do q_0. Čo ale ak sme v stave q_4, automat nám vydal nápoj a my vhodíme 50 centov? Mal by to zaevidovať a teda nás posunúť do stavu q_1. Rovnako tak, ak vhodíme 1 €, tak nás posunie do q_2.

Výsledný automat vidíte na obrázku 1.

(b) Definujeme: $\Sigma = \{50c, 1E, K, C, M\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, počiatočný stav je q_0, akceptačný stav je iba jeden, preto $F = \{q_4\}$ a prechodovú funkciu si môžeme skúsiť zapísať aj do tabuľky.

(c) Počiatočná konfigurácia pre prvú tabuľku bude $(q_0, 50c.50c.50c.K)$ a pre druhú tabuľku $(q_0, 1E.50c.C)$.

(d) Simuláciu výpočtu môžeme spraviť dvomi spôsobmi, buď použijeme prechodovú funkciu, alebo reflexívno tranzitívny uzáver relácie krok stroja. Pre každú konfiguráciu použijem iný, aby sme si ukázali oba.

δ	$50c$	$1E$	K	C	M
q_0	q_1	q_2	q_0	q_0	q_0
q_1	q_2	q_3	q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_3	q_2	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3	q_4	q_4	q_4
q_4	q_1	q_2	q_0	q_0	q_0

Tabuľka 3: Prechodová funkcia

$\hat{\delta}(q_0, 50c.50c.50c.K) = \hat{\delta}(q_1, 50c.50c.K) = \hat{\delta}(q_2, 50c.K) = \hat{\delta}(q_3, K) = \delta(q_4, \lambda)$ Skončili sme v stave q_4, preto je tento výpočet akceptujúci.

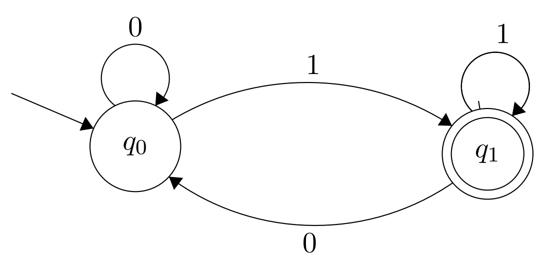
$(q_0, 1E.50c.C) \vdash_M (q_2, 50c.C) \vdash_M = (q_3, C) \vdash_M (q_4, \lambda)$. Opäť sme skončili v stave q_4, čiže tento výpočet je akceptujúci.

(e) Skúsme vymyslieť zamietajúci výpočet a ten odsimulovať. Čo ak si vypýtame nápoj skôr, ako hodíme dosť peňazí? Napr. $(q_0, 1E.M) \vdash_M (q_2, M) \vdash_M (q_2, \lambda)$. Ďalším zamietajúcim výpočtom bude aj situácia, ak tam vhodíme napr. 1,5 €, ale nestlačíme žiadne tlačidlo. Napr. $(q_0, 1E.50c.50c.50c) \vdash_M (q_2, 50c.50c.50c) \vdash_M = (q_3, 50c.50c) \vdash_M (q_3, 50c)$ $\vdash_M (q_3, \lambda)$.

(f) Nad touto úlohou sa zamyslite. Koľko stavov by sme museli pridať, aby si automat vedel zapamätať, že má vydať 50 centov, 1 €...? Kedy by automat mince vydával?

3. príklad

Pre automat na obrázku 2 spravte formálny zápis (pätica z prednášky) a spravte výpočet na slovách 110101 a 0010110.



Obr. 2: Automat z 3. príkladu

(a) Aké slová automat akceptuje? Dokážte jeho správnosť.

(b) Keby sme vymenili akceptačný a vstupný stav, aké slová by akceptoval?

(c)* Navrhnite automat (DKA), ktorý akceptuje všetky slová nad abecedou Σ_{bool}, ktoré končia 10, a neakceptuje žiadne iné.

(d)* Vieme vytvoriť automat, ktorý bude akceptovať iba slová končiace 1^k, (pre nami zvolené $k \in N$)? Koľko stavov bude takýto automat mať (v závislosti od k)? Ako sa vytvorí výsledný automat pre zadané k?

Riešenie 3. príkladu

Formálny zápis automatu je: $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, kde $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_1\}$ a $\{\delta(q_0, 0) = q_0; \delta(q_0, 1) = q_1; \delta(q_1, 0) = q_0; \delta(q_1, 1) = q_1\}$.

Spravme výpočet na slove 110101. $\hat{\delta}(q_0, 110101) = \hat{\delta}(q_1, 10101) = \hat{\delta}(q_1, 0101) = \hat{\delta}(q_0, 101) = \hat{\delta}(q_1, 01) = \hat{\delta}(q_0, 1) = \hat{\delta}(q_1, \lambda)$.

Pre slovo 0010110 bez všetkých krokov: $\hat{\delta}(q_0, 0010110) = \hat{\delta}(q_0, \lambda)$.

Prvý výpočet je akceptačný, druhý je zamietajúci.

(a) Aj z dvoch výpočtov vyššie vidíme, že automat akceptuje slová, ktoré končia 1, čo vieme zapísať ako $L(M) = \{w1 \mid w \in \Sigma^*\}$. Poďme to dokázať.

V stave q_0 skončia slová, ktoré končia znakom 0 a v stave q_1 skončia slová, ktoré končia znakom 1. Zapíšme to formálne:

- $KL[q_0] = \{\lambda, w0 \mid w \in \Sigma^*\}$
- $KL[q_1] = \{w1 \mid w \in \Sigma^*\}$

Toto bude našou hypotézou, ktorú budeme overovať pomocou matematickej indukcie (MI). [2]

Báza indukcie Spravíme výpočet na automate pre slová dĺžky 0 a vyššie, pokiaľ sa nedostaneme do všetkých stavov.

[2] Ešte predtým sa ale musíme zamyslieť, či (1) KL triedy sú vzájomne disjunktné (zjavne slovo nevie končiť aj 0 aj 1, takže sú), či (2) každé slovo nad abecedou patrí do práve jednej KL triedy (máme tam priamo spomenuté aj prázdne slovo, zvyšné slová nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ vieme jednoznačne zaradiť do jednej KL triedy), či (3) zjednotenie všetkých KL tried bude obsahovať všetky slová z Σ^* (zjavne áno), a či (4) zjednotenie KL tried akceptačných stavov dá jazyk, ktorý má automat rozoznať (máme len jeden akceptačný stav, takže áno).

- *slová dĺžky 0:* $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = q_0 \implies \lambda \in KL[q_0]$.
- *slová dĺžky 1:*
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_0 \implies 0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_1 \implies 1 \in KL[q_1]$.

Obe slová 0 a 1 vieme napísať ako $\lambda 0$ a $\lambda 1$, čiže je zrejmé, že patria do KL tried stavov, v ktorých skončili. Dostali sme sa do všetkých stavov, báza indukcie je preto kompletná.

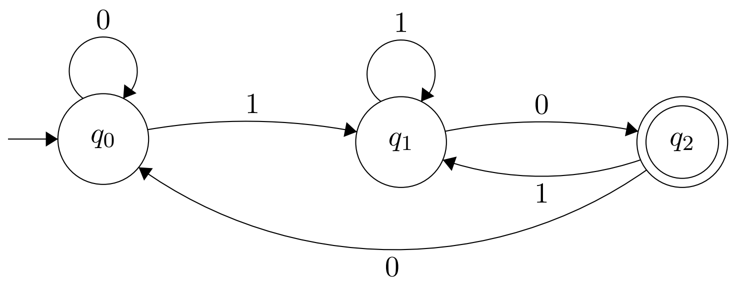
Indukčný predpoklad: Predpokladáme, že hypotéza platí pre všetky slová dĺžky $k, k \leq 1$. Alebo zapísané inak: slová $w \in \Sigma^*$, kde $|w| = k, k \leq 1$ (keďže platnosť hypotézy pre slová týchto dĺžok sme dokázali v báze).

Indukčný krok: Ak dokážeme, že naša hypotéza platí pre všetky slová dĺžky $k+1$, kde $k \geq 1$, dokážeme všeobecnú platnosť našej hypotézy. Slová tejto dĺžky vieme zapísať ako $z = wa$, kde $w \in \Sigma^*, |w| = k$ a $a \in \Sigma$. O w môžu platiť dve veci - buď bude končiť 0 alebo bude končiť 1. Musíme ich obe rozobrať.

- w končí 0, takže z IP vieme, že patrí do $KL[q_0]$. Teraz nám opäť vzniknú dva prípady - $a = 0$ alebo $a = 1$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_0, 0) = q_0$. Slovo $w0$ končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že $z0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$. Slovo $w1$ končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že $w1 \in KL[q_1]$.
- w končí 1, takže z IP vieme, že patrí do $KL[q_1]$. Teraz nám opäť vzniknú dva prípady - $a = 0$ alebo $a = 1$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_1, 0) = q_0$. Slovo $w0$ končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že $z0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$. Slovo $w1$ končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že $w1 \in KL[q_1]$.

Dokázali sme platnosť našej hypotézy. Čiže sme dokázali platnosť KL tried, a teda aj to, že jazyk rozpoznáva slová končiace 1 (tj. slová, ktoré skončia v stave q_1, čomu zodpovedá $KL[q_1]$).

(b) Ak by sme vymenili akceptačný a vstupný stav, automat by akceptoval slová končiace na 0.



Obr. 3: Riešenie príkladu 3c

(c) Automat bude musieť mať aspoň tri stavy, aby sme vedeli zaručiť, že v slove je určite 1 a po nej nasleduje 0. Na obrázku 4 vidíme, že v stave q_0 môže byť ľubovoľne veľa 0, lebo čakáme na 1. V stave q_1 sme už prečítali jednu jednotku, preto za ňou môže nasledovať ľubovoľne veľa ďalších jednotiek, a do akceptačného stavu sa presunieme iba ak príde 0.

Čo ak by bolo slovo 1010? Mali by sme ho akceptovať, preto ak po 10 príde jednotka, presunieme sa do stavu q_1 (čiže tam budú končiť slová končiace jednotkou) a po nule sa zas presunieme do q_1.

Čo v prípade slov, ktoré obsahujú 10, ale nie ako sufix? Napr. 1011, 11101, 100000? Ani jedno z týchto slov nemôže skončiť v stave q_2. Prvé dve slová skončia v stave q_1, keďže končia jednotkou, tretie slovo by malo skončiť v stave q_0. Prečo? Ak by sme k nemu prireťazili 10, bolo by akceptované, pričom k prvým dvom slovám stačí prireťaziť iba 0. Takéto slová preto nemôžu skončiť v rovnakom stave.

(d) Zamyslite sa, koľko stavov (a prechodov) by ste museli vytvoriť v takomto automate? Viete použiť automat z (a) a nejako ho upraviť?

4. príklad*

Nakreslite automat $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, ak poznáte $F = \{q_0\}$ a δ (tabuľka 4).

(a) Viete zo zadaných informácií zistiť Σ, Q?

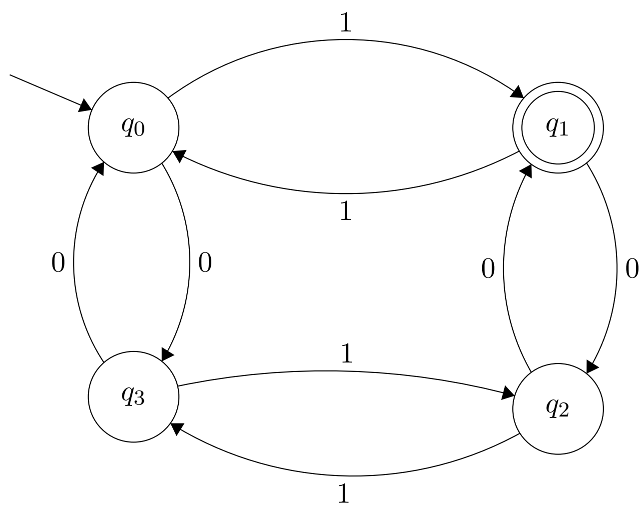
(b) Aké slová tento automat rozoznáva?

δ	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_2	q_0
b	q_0	q_1	q_2

Tabuľka 4: Prechodová funkcia δ

5. príklad

Aký jazyk rozpoznáva automat na obrázku 4? Dokážte to.



Obr. 4: Zadanie príkladu 5

Idea riešenia 5. príkladu

Skúsme zistiť, aký jazyk rozoznáva daný automat. V stave q_0 skončí určite prázdne slovo. Koľko jednotiek bude obsahovať slovo, ktoré skončí v q_0? Vieme sa tam dostať cez stav q_1, pričom na ceste $q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_0$ bude vždy párny počet jednotiek, hocikoľkokrát túto cestu zopakujeme. Môžeme prejsť až do q_2, ale všimnime si, že či sa do q_0 vrátime zo stavu q_3 alebo q_1, vždy prejdeme po párnom počte jednotiek (jednou vychádzame a druhou vchádzame). Rovnako to je pre q_0 s nulami – buď pôjdeme do q_3 a späť, čo vždy dá párny počet núl, alebo pôjdeme cez stav q_2 a opäť budeme potrebovať párny počet núl. V stave q_0 by tak mali končiť slová, ktoré majú párny počet núl a párny počet jednotiek. To vieme zapísať ako $KL[q_0] = \{w \mid |w|_0 \; mod \; 2 = 0 \wedge |w|_1 \; mod \; 2 = 0\}$

Ako sa vieme dostať do q_1? Buď priamo z q_0 a na ceste prečítame jednu jednotku, alebo pôjdeme cez q_3 a na ceste prečítame jednu jednotku a dve nuly. Hocijaký iný okruh, ktorý z q_1 spravíme, bude obsahovať párny počet núl aj jednotiek. To spočítané s tými, ktoré sme spravili pri prvom prechode do q_1 nám dáva nepárny počet jednotiek a párny počet núl. Čiže: $KL[q_1] = \{w \mid |w|_0 \ mod\ 2 = 0 \land |w|_1 \ mod\ 2 = 1\}$.

Do q_3 sa vieme dostať priamo z q_0 po jednej nule, alebo cez zvyšné stavy po dvoch jednotkách a jednej nule. Tiež tu platí to, čo v predchádzajúcich stavoch, ak z q_3 pôjdeme do iného stavu a späť, prečítame párny počet núl a/alebo párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že v tomto stave skončia slová, ktoré majú nepárny počet núl a párny počet jednotiek. $KL[q_3] = \{w \mid |w|_0 \ mod\ 2 = 1 \land |w|_1 \ mod\ 2 = 0\}$.

A čo stav q_2? Keď sa pozrieme na KL triedy zvyšných stavov, vidíme že nám chýbajú ešte slová, ktoré majú nepárny počet núl a nepárny počet jednotiek. Skontrolujme. Do q_2 sa vieme dostať cez q_1 prečítaním jednej jednotky a jednej nuly, alebo cez q_3 tiež prečítaním jednej nuly a jednej jednotky. Takže $KL[q_2] = \{w \mid |w|_0 \ mod\ 2 = 1 \land |w|_1 \ mod\ 2 = 1\}$.

Z toho vyplýva, že $L(M) = \{w \mid |w|_0 \ mod\ 2 = 0 \land |w|_1 \ mod\ 2 = 1\}$.

Dokážte, že to platí.

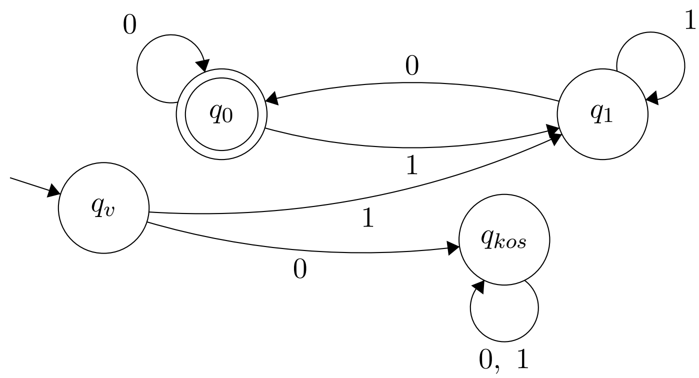
6. príklad

Zostrojte automat, ktorý akceptuje správne zapísané čísla v binárnej sústave (začínajú 1), ktoré sú deliteľné 2.

Idea riešenia 6. príkladu

Kedy je binárne číslo párne? Keď končí 0. To je veľmi podobné tomu, čo robil automat v 3. príklade (tam museli končiť čísla 1). Čo ale musíme ešte vyriešiť? To, aby čísla nezačínali 0 - preto musíme vytvoriť ďalšie stavy, v ktorých overíme prvý čítaný symbol a rozhodneme, či máme na vstupe korektné číslo alebo nie. Pozrite obrázok 5.

Časť automatu so stavmi q_0 a q_1 tak funguje na rovnakom princípe ako automat z 3. príkladu. Stav q_v slúži ako vstupný stav a podľa prvého znaku buď pošle zvyšok vstupu na vyhodnocovanie alebo ho „zahodí“ - posunie sa do stavu q_{kos}, odkiaľ sa už nevieme dostať do akceptačného stavu.



Obr. 5: Riešenie príkladu 6

Poznámky

KL triedy

- Musíme zadefinovať KL pre každý stav automatu.
- Zjednotenie KL tried pre všetky stavy sa musí rovnať Σ^*.
- Zjednotenie KL tried pre akceptačné stavy sa musí rovnať jazyku, ktorý automat rozoznáva.
- Teda - každé slovo nad abecedou musí patriť do nejakej KL triedy, a každé slovo z jazyka, ktorý automat rozoznáva, musí patriť do KL triedy jedného z akceptačných stavov.
- Prienik akýchkoľvek dvoch KL tried je prázdna množina - t.j. KL triedy sú disjunktné množiny.

MI pre automat

- Najprv si zadefinujeme KL triedy pre všetky stavy, to bude naša hypotéza (overte si všetko, čo musí platiť o KL triedach).
- V báze postupne na slovách dĺžky 0, 1... zisťujeme, kde jednotlivé slová v automate skončia, a či naozaj patria do KL triedy daného stavu. Dokazujeme po takú dĺžku slov, kým v báze nepokryjeme všetky stavy.
- Indukčný predpoklad je, že náš automat správne rozoznáva slová dĺžky $k \leq x$, kde x je (konkrétna) dĺžka najdlhšieho slova z bázy. $w, |w| = k, k \leq x$.

- Indukčný krok - dokazujeme pre slová dĺžky $k+1$. $z = wa, |z| = k+1, a \in \Sigma$.
- Dokazujeme pre všetky KL triedy, do ktorých môže patriť w a pre každú triedu ešte pre každý symbol z abecedy, ktoré k nemu vieme "prilepiť", aby sme mali slovo z.
- Treba si uvedomiť, že slovo w nielen končí v stave q_i, ale má aj vlastnosti $KL[q_i]$. Tie využijeme v IK a pre každú možnosť ukážeme, že ak k slovu w s nejakými vlastnosťami pridáme symbol a, slovo z skončí v stave q_j a aj vlastnosťami bude patriť do triedy $KL[q_j]$.
- Častou chybou je, že iba píšete, čo by malo pre dané slovo platiť, ale nekontrolujete si, či to aj naozaj platí. Potom si nenájdete chyby, či neuvedomíte, že ste na nejakú možnosť pri definovaní KL tried zabudli. Takže si to vždy overte, pri zložitejších triedach môžete začať na konkrétnych príkladoch, snažte sa ale dostať k všeobecnému opisu.