

## 1. príklad

- (a) Nájdite príklad jazykov  $A, B$ , pre ktoré platí:  $A \neq B$  ale  $A^2 = B^2$ .
- (b) Zapište jazyk  $L = \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\}$  ako prienik dvoch jazykov  $L_1$  a  $L_2$ , ktoré spĺňajú súčasne nasledujúce podmienky:
- (i)  $L_1 \not\subseteq L_2, L_2 \not\subseteq L_1$
  - (ii)  $L_1, L_2 \subseteq \{0\}^+ \{1\}^+ \{2\}^+$
  - (iii)  $L_1 - L$  a  $L_2 - L$  sú nekonečné jazyky.

Odôvodnite.

### Riešenie 1. príkladu

- (a) Hľadáme jazyky, ktoré sú rôzne, ale ich druhé mocniny sú rovnaké. Môžeme skúšať hľadať takéto konečné jazyky, uvažovať, že potrebujeme nejaké slovo vyskladať iným spôsobom, ako vznikne v druhom jazyku. Mohli by ste navrhnúť napr. takúto dvojicu jazykov:  $A = \{a, aaa\}, B = \{\lambda, aa, aaaa\}$ .

Pozrime sa na ich druhé mocniny.  $A^2 = \{aa, aaaa, aaaaaa\} = \{a^2, a^4, a^6\}$ .  $B^2 = \{\lambda, aa, aaaa, aaaaaa\} = \{\lambda, a^2, a^4, a^6\}$ . Vidíme, že sú takmer rovnaké, presnejšie  $A^2 \subset B^2$ , ale nie sú rovnaké, lebo v  $B^2$  je aj prázdne slovo  $\lambda$ . Je častou chybou, že si neuvedomíte, že  $\lambda \cdot \lambda = \lambda$ .

Z toho vyplýva, že nevieme mať dva jazyky, v ktorých v jednom prázdne slovo je a v druhom nie je. Keby sme dali do oboch prázdne slovo, tak v ich druhých mocninách by bol aj jazyk samotný (jazyk zretazený s prázdnyim slovom), čo by nám to opäť mohlo pokaziť.

Pri konečných jazykoch bude ich druhá mocnina vždy obsahovať viac slov<sup>1</sup> (zamyslite sa, prečo). Tak skúsme nájsť nejaké nekonečné jazyky.

Nech  $A = \{\lambda, a, aa, \dots\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

$B = \{\lambda, a, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 2\}$

Ich druhé mocniny budú rovné  $A^2 = B^2 = A = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , keďže slovo  $aa$  v  $B^2$  vznikne zretazením  $a.a$ . Vidíme, že tieto jazyky rovnaké nie sú, ale ich druhé mocniny áno.

---

<sup>1</sup>okrem jazyka  $\{\lambda\}$

- (b) Jazyk  $L$  je nekonečný. Keďže  $L_1 - L$ ,  $L_2 - L$  sú nekonečné jazyky, tak aj  $L_1$  a  $L_2$  budú nekonečné. Aby sme splnili podmienku (ii) a zároveň, aby sme jednoznačne vedeli povedať, že  $L_1 \cap L_2 = L$ , použijeme jazyk  $L$  s miernymi úpravami pre oba jazyky.

$$\text{Nech: } L_1 = \{0^{m+k} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m, k \geq 1\}$$

$$L_2 = \{0^{m+4} 1^{lm} 2^{m+3} \mid m, l \geq 1\}.$$

Čo sme zmenili? V oboch jazykoch pribudol jeden parameter navyše. Čo to znamená? Skúsme si obaja jazyky napísať ako zjednotenie jazykov postupnou iteráciou týchto parametrov.

$$\text{Čiže: } L_1 = \{0^{m+1} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+2} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+3} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \dots$$

$$L_2 = \{0^{m+4} 1^m 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{3m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{4m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \dots$$

Vidíme, že jazyk  $L$  je podmnožinou oboch týchto jazykov. Je aj ich prienikom? V jazyku  $L_1$  budú rovnaké slová ako v  $L_2$  iba ak v jazyku  $L_1$  bude  $k = 4$  a zároveň v jazyku  $L_2$  bude  $l = 2$ . Pre iné hodnoty  $k, l$  slová z jedného jazyka nebudú patriť do druhého (a opačne).

Ako budú vyzeráť  $L_1 - L$  a  $L_2 - L$ ? Pozrime sa vyššie. Vidíme, že ak z oboch jazykov vynecháme jazyk  $L$ , parametre  $k, l$  nemôžu nadobudnúť hodnoty 4 resp. 2. To znamená, že:

$$L_1 - L = \{0^{m+k} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m, k \geq 1, k \neq 4\}.$$

$$L_2 - L = \{0^{m+4} 1^{lm} 2^{m+3} \mid m, l \geq 1, l \neq 2\}.$$

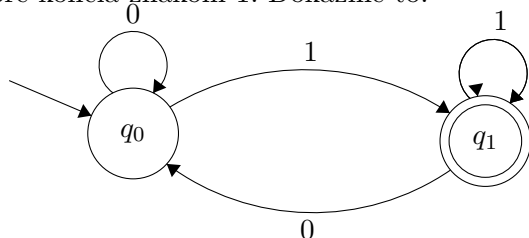
Oba jazyky sú nekonečné (podmienka (iii)), keďže množina celých kladných čísel okrem 4 (resp. okrem 2) je nekonečná. Podmienku (ii) sme splnili, v jazyku  $L_1$  by mohlo byť aj  $k = 0$ , keďže  $m \geq 1$ , čiže tam vždy bude aspoň jedna nula. V jazyku  $L_2$  nemôže byť  $l = 0$ , keďže v takom prípade by v slovách neboli žiadne jednotky.

A čo s podmienkou (i)? Pozrime sa na slovo z jazyka  $L_1$ , keď  $m = 1 \wedge k = 1$ .  $w = 0^{1+1} 1^2 2^{1+3} = 00112222$ . Toto slovo sa určite nebude nachádzať v jazyku  $L_2$ . Prečo? Lebo pre  $m = 1$  bude v slovách z jazyka  $L_2$  päť núl, dve nuly sa v žiadnom slove z  $L_2$  nachádzať nebudú. To znamená, že  $L_1 \not\subseteq L_2$ .

Skúsme to aj opačne. Pre  $m = 1 \wedge l = 1$  bude slovo  $w = 0^{1+4} 1^{1 \cdot 1} 2^{1+3} = 0000012222$ . Toto slovo nepatrí do jazyka  $L_1$ , keďže v ňom budú vždy slová, ktoré majú párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že  $L_2 \not\subseteq L_1$ .

## 2. príklad\*

Na obrázku je automat, ktorý rozpoznáva slová nad abecedou  $\{0,1\}$ , ktoré končia znakom 1. Dokážme to.



### Riešenie 2. príkladu

V stave  $q_0$  skončia slová, ktoré končia znakom 0 a v stave  $q_1$  skončia slová, ktoré končia znakom 1. Zapišme to formálne:

- $KL[q_0] = \{\lambda, w0 \mid w \in \Sigma^*\}$
- $KL[q_1] = \{w1 \mid w \in \Sigma^*\}$

Toto bude našou hypotézou, ktorú budeme overovať pomocou matematickej indukcie (MI).<sup>2</sup>

**Báza indukcie** Spravíme výpočet na automate pre slová dĺžky 0 a vyššie, pokiaľ sa nedostaneme do všetkých stavov.

- *slová dĺžky 0*:  $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = q_0 \implies \lambda \in KL[q_0]$ .
- *slová dĺžky 1*:
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_0 \implies 0 \in KL[q_0]$ .
  - $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_1 \implies 1 \in KL[q_1]$ .

Obe slová 0 a 1 vieme napísať ako  $\lambda 0$  a  $\lambda 1$ , čiže je zrejmé, že patria do KL tried stavov, v ktorých skončili. Dostali sme sa do všetkých stavov, báza indukcie je preto kompletná.

<sup>2</sup>Ešte predtým sa ale musíme zamyslieť, či (1) KL triedy sú vzájomne disjunktné (zjavne slovo nevie končiť aj 0 aj 1, takže sú), či (2) každé slovo nad abecedou patrí do práve jednej KL triedy (máme tam priamo spomenuté aj prázdne slovo, zvyšné slová nad abecedou  $\Sigma = \{0,1\}$  vieme jednoznačne zaradiť do jednej KL triedy), či (3) zjednotenie všetkých KL tried bude obsahovať všetky slová z  $\Sigma^*$  (zjavne áno), a či (4) zjednotenie KL tried akceptačných stavov dá jazyk, ktorý má automat rozoznať (máme len jeden akceptačný stav, takže áno).

**Indukčný predpoklad:** Predpokladáme, že hypotéza platí pre všetky slová dĺžky  $k, k \leq 1$ . Alebo zapísané inak: slová  $w \in \Sigma^*$ , kde  $|w| = k, k \leq 1$  (keďže platnosť hypotézy pre slová týchto dĺžok sme dokázali v báze).

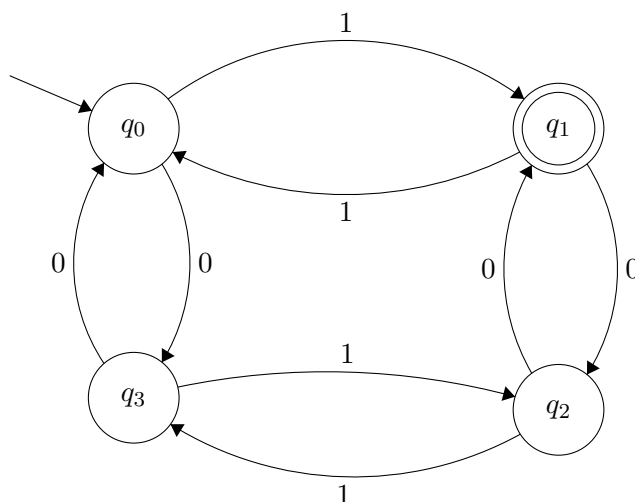
**Indukčný krok:** Ak dokážeme, že naša hypotéza platí pre všetky slová dĺžky  $k + 1$ , kde  $k \geq 1$ , dokážeme všeobecnú platnosť našej hypotézy. Slová tejto dĺžky vieme zapísať ako  $z = wa$ , kde  $w \in \Sigma^*, |w| = k$  a  $a \in \Sigma$ . O  $w$  môžeme platiť dve veci - buď bude končiť 0 alebo bude končiť 1. Musíme ich obe rozobrať.

- $w$  končí 0, takže z IP vieme, že patrí do  $KL[q_0]$ . Teraz nám opäť vzniknú dva prípady -  $a = 0$  alebo  $a = 1$ .
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_0, 0) = q_0$ . Slovo  $w0$  končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že  $z0 \in KL[q_0]$ .
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$ . Slovo  $w1$  končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že  $w1 \in KL[q_1]$ .
- $w$  končí 1, takže z IP vieme, že patrí do  $KL[q_1]$ . Teraz nám opäť vzniknú dva prípady -  $a = 0$  alebo  $a = 1$ .
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_1, 0) = q_0$ . Slovo  $w0$  končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že  $z0 \in KL[q_0]$ .
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$ . Slovo  $w1$  končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že  $w1 \in KL[q_1]$ .

Dokázali sme platnosť našej hypotézy. Čiže sme dokázali platnosť KL tried, a teda aj to, že jazyk rozpoznáva slová končiacie 1 (tj. slová, ktoré skončia v stave  $q_1$ , čomu zodpovedá  $KL[q_1]$ ).

### 3. príklad

Aký jazyk rozpoznáva automat na obrázku? Dokážte to.



### Idea riešenia 3. príkladu

Skúsme zistiť, aký jazyk rozoznáva daný automat. V stave  $q_0$  skončí určité prázdne slovo. Koľko jednotiek bude obsahovať slovo, ktoré skončí v  $q_0$ ? Vieme sa tam dostať cez stav  $q_1$ , pričom na ceste  $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0$  bude vždy párny počet jednotiek, hocikkoľkokrát túto cestu zopakujeme. Môžeme prejsť až do  $q_2$ , ale všimnime si, že či sa do  $q_0$  vrátíme zo stavu  $q_3$  alebo  $q_1$ , vždy prejdeme po párnom počte jednotiek (jednou vychádzame a druhou vchádzame). Rovnako to je pre  $q_0$  s nulami – buď pôjdeme do  $q_3$  a späť, čo vždy dá párny počet núl, alebo pôjdeme cez stav  $q_2$  a opäť budeme potrebovať párny počet núl. V stave  $q_0$  by tak mali končiť slová, ktoré majú párny počet núl a párny počet jednotiek. To vieme zapísať ako  $KL[q_0] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 0\}$

Ako sa vieme dostať do  $q_1$ ? Buď priamo z  $q_0$  a na ceste prečítame jednu jednotku, alebo pôjdeme cez  $q_3$  a na ceste prečítame jednu jednotku a dve nuly. Hocijaký iný okruh, ktorý z  $q_1$  spravíme, bude obsahovať párny počet núl aj jednotiek. To spočítané s tými, ktoré sme spravili pri prvom prechode do  $q_1$  nám dáva nepárny počet jednotiek a párny počet núl. Čiže:  $KL[q_1] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Do  $q_3$  sa vieme dostať priamo z  $q_0$  po jednej nule, alebo cez zvyšné stavy po dvoch jednotkách a jednej nule. Tiež tu platí to, čo v predchádzajúcich stavoch, ak z  $q_3$  pôjdeme do iného stavu a späť, prečítame párny počet núl a/alebo párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že v tomto stave skončia slová, ktoré majú nepárny počet núl a párny počet jednotiek.  $KL[q_3] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 1 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 0\}$ .

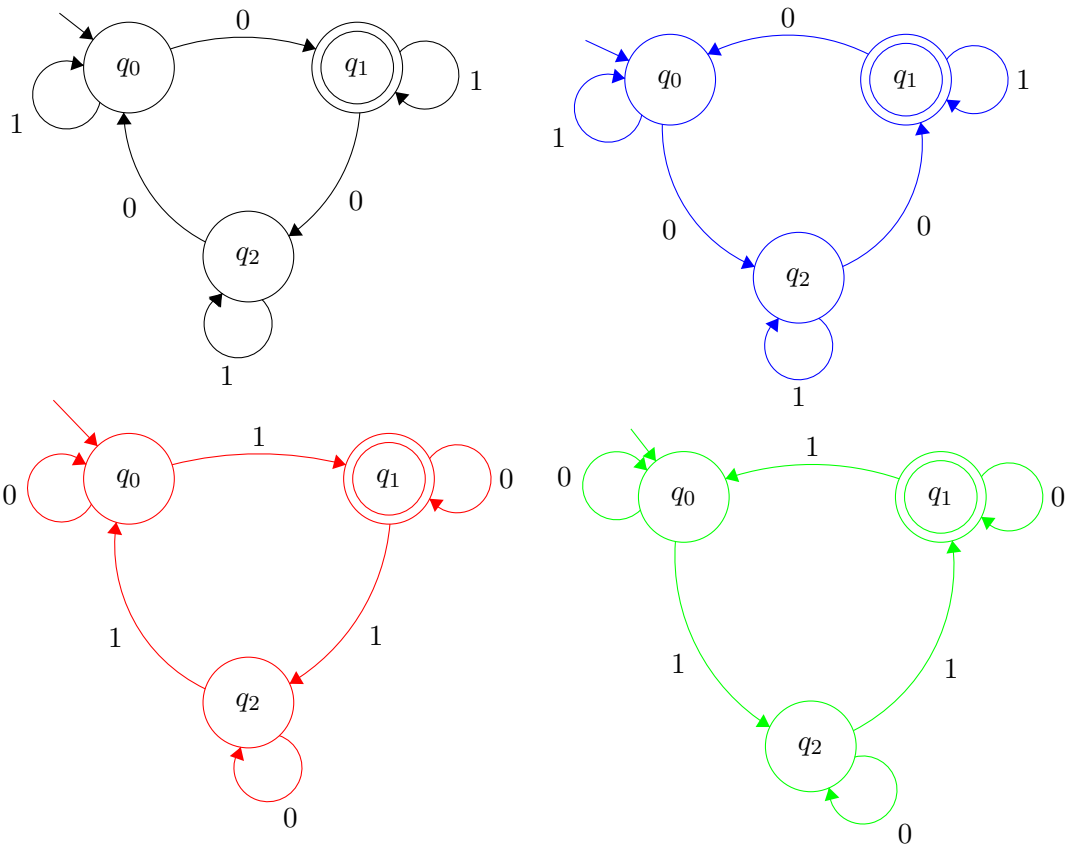
A čo stav  $q_2$ ? Keď sa pozrieme na KL triedy zvyšných stavov, vidíme že nám chýbajú ešte slová, ktoré majú nepárny počet núl a nepárny počet jednotiek. Skontrolujme. Do  $q_2$  sa vieme dostať cez  $q_1$  prečítaním jednej jednotky a jednej nuly, alebo cez  $q_3$  tiež prečítaním jednej nuly a jednej jednotky. Takže  $KL[q_2] = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 1 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Z toho vyplýva, že  $L(M) = \{w \mid |w|_0 \bmod 2 = 0 \wedge |w|_1 \bmod 2 = 1\}$ .

Dokážte, že to platí.

#### 4. príklad\*

Na obrázku sa nachádzajú 4 automaty rozoznávajúce rôzne jazyky. Pre každý z nich zistite, aký jazyk rozoznáva a určite KL množiny všetkých stavov. Čo znázorňujú dolné indexy stavov v čiernom a červenom automate?



### Riešenie príkladu 4

Všetky štyri automaty pracujú nad abecedou  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

(a) **Čierny automat** rozoznáva jazyk  $L_{black} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 1\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 1\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 2\}$

(b) **Modrý automat** rozoznáva jazyk  $L_{blue} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 2\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 2\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 1\}$

(c) **Červený automat** rozoznáva jazyk  $L_{red} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 1\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 1\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 2\}$

(d) **Zelený automat** rozoznáva jazyk  $L_{green} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 2\}$

- $KL[q_0] = \{\lambda; w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 0\}$
- $KL[q_1] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 2\}$
- $KL[q_2] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 \bmod 3 = 1\}$

Vidíme, že indexy stavov v červenom a čiernom automate značia zvyšky po delení. Samozrejme, aj modrý a zelený automat je správny, ale pre ľahšiu orientáciu a pre dokazovanie je vhodné používať jasné označovanie, ktoré vám priamo napovedá, čo sa v stave deje. Uvidíme to v ďalších príkladoch.

Zamyslite sa ešte nad tým, či je potrebné písať  $\lambda$  pri týchto KL množinách. Svoju odpoveď skúste zdôvodniť.

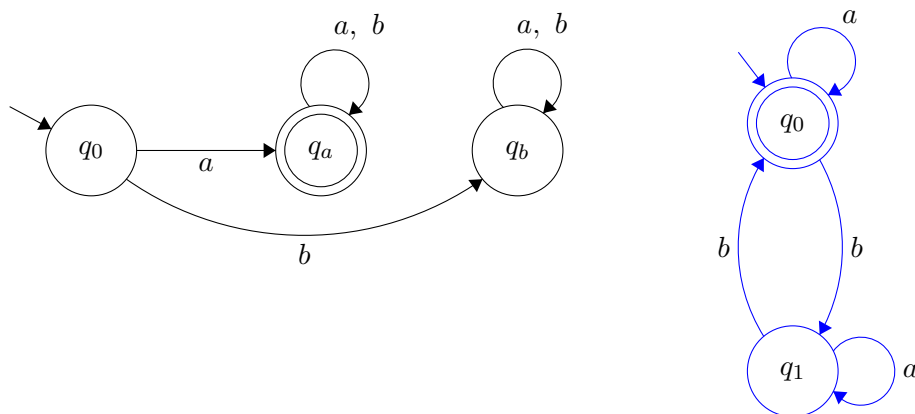
### 5. príklad\*

Zostrojte automat, ktorý rozoznáva jazyk  $L = \{w = ax \mid x \in \{a, b\}^* \wedge |w|_b \bmod 2 = 0\}$ . Z akých dvoch jazykov je  $L$  zložený? Pre každý zostrojte automat, dokážte ich správnosť, a pomocou modulárnej konštrukcie (simulácie) vytvorte automat pre jazyk  $L$ .

### Riešenie príkladu 5

Tento jazyk sa skladá z dvoch jazykov, označme ich  $L_1$  a  $L_2$ .  $L_1 = \{w = ax \mid x \in \{a, b\}^*\}$ ;  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \bmod 2 = 0\}$ .

Najprv si pre každý z nich vytvoríme automat. Aby sa nám s automatmi ľahšie ďalej pracovalo, budeme sa snažiť označovať stavy podľa toho, čo sa v nich deje, a tiež sa vyvarovať veľa stavom s rovnakými menami.



Vznikli dva automaty, pre každý si definujeme KL triedy.

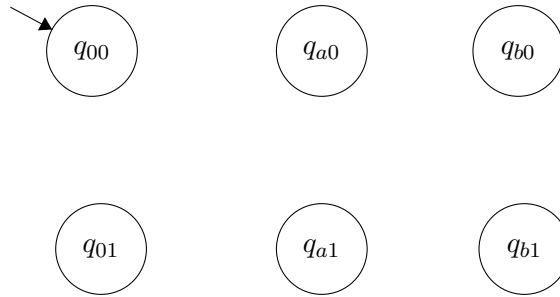
- **Čierny automat:**  $L_1 = \{ax \mid x \in \{a, b\}^*\}$ 
  - $KL[q_0] = \{\lambda\}$
  - $KL[q_a] = \{ax \mid x \in \{a, b\}^*\}$  – čiže slová začínajúce znakom  $a$
  - $KL[q_b] = \{bx \mid x \in \{a, b\}^*\}$  – čiže slová začínajúce znakom  $b$
- **Modrý automat:**  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \bmod 2 = 0\}$ 
  - $KL[q_0] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \bmod 2 = 0\}$  – párny počet bčok
  - $KL[q_1] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \bmod 2 = 1\}$  – nepárny počet bčok

Dôkazy správnosti nechávam na vás ako opakovanie posledného cvičenia.

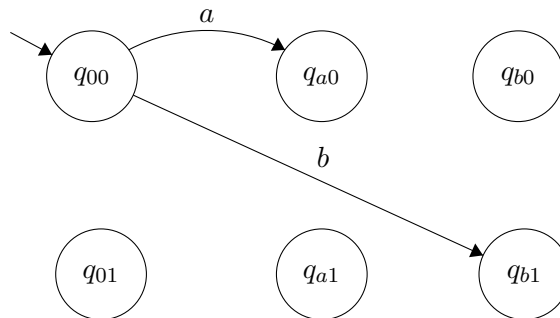
Podme si spraviť modulárnu konštrukciu. Možno ste rozmýšľali, prečo má jeden automat všetky stavy v jednom riadku a druhý v jednom stĺpci. Je to preto, aby sa nám ľahko spravil kartézsky súčin stavov. Postup je nasledovný:

- (i) Potrebujeme  $3 \times 2$  stavov, každý bude mať dvojznakový index, kde prvý znak bude z čierneho automatu a druhý z modrého. Vieme, že vstupný stav bude ten, ktorý bol vstupný v oboch, v tomto prípade teda  $q_{00}$ .

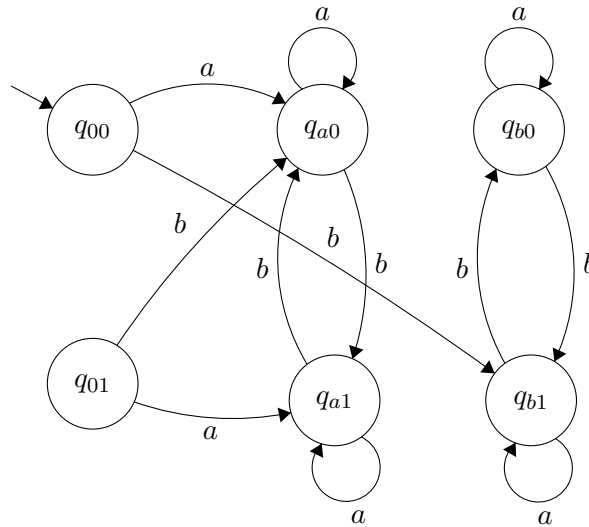




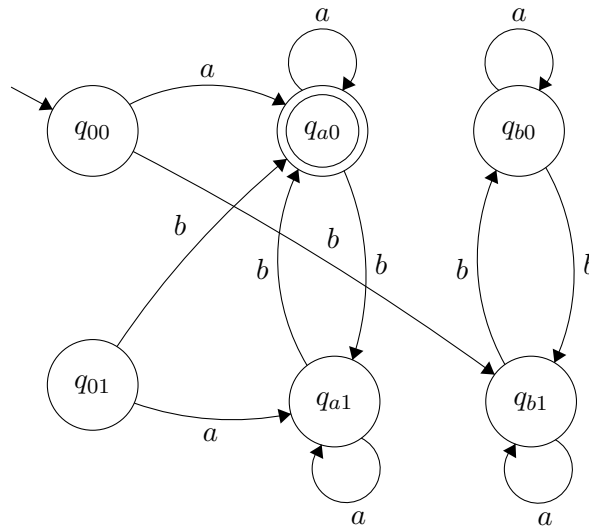
- (ii) Teraz potrebujeme pridať prechody. Ako na to? Pozrime sa na prechody zo stavu  $q_{00}$ . V čiernom automate sa po  $a$  dostaneme zo stavu  $q_0$  do stavu  $q_a$  a v modrom automate sa z  $q_0$  dostaneme po  $a$  do  $q_0$ . Takže zo stavu  $q_{00}$  po  $a$  pôjde prechod do stavu  $q_{a0}$ . Podobne pre prechod po  $b$  – v čiernom automate sa zo stavu  $q_0$  dostaneme do stavu  $q_b$  a v modrom automate sa z  $q_0$  dostaneme do  $q_1$ . Z toho vyplýva, že zo stavu  $q_{00}$  po  $b$  pôjde prechod do stavu  $q_{b1}$ .



- (iii) Všeobecnejšie: aby sme zistili prechod zo stavu  $q_{ij}$  po znaku  $e$ , tak najprv pozrieme, kam sa dostaneme zo stavu  $q_i$  po  $e$  v prvom automate (napr. do stavu  $q_k$ ) a potom kam sa dostaneme zo stavu  $q_j$  po  $e$  v druhom automate (napr. do stavu  $q_l$ ). Kombináciou výsledkov dostaneme výsledný stav ( $q_{kl}$ ). Doplňme aj zvyšok prechodov v našom automate.

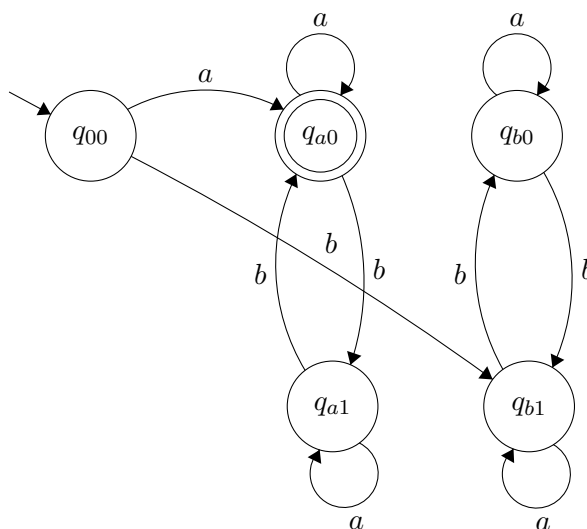


- (iv) Keď už máme všetky prechody, ešte musíme určiť, ktoré stavy sú akceptačné. Keďže robíme prienik dvoch automatov (vo výslednom jazyku je medzi  $L_1$  a  $L_2$  „a zároveň“), akceptačné stavy budú tie, ktoré sú akceptačné aj v jednom aj v druhom automate. V našom prípade to je iba stav  $q_{a0}$ .



- (v) Pozrite sa na automat. Sú v ňom všetky stavy dosiahnuteľné (teda sa do nich vieme počas výpočtu dostať)? Vidíme, že do stavu  $q_{01}$  sa

dostať nedá. Ale prečo? Ak si spomenieme na  $KL[q_0]$  z čierneho a  $KL[q_1]$  modrého automatu, získame odpoveď. Neexistuje totiž žiadne slovo, ktoré je zároveň prázdne a zároveň má nepárny počet bécok. Tento stav aj s prislúchajúcimi prechodmi preto nemusíme kresliť.



(vi) Ešte si definujme KL triedy tohto automatu.

- $KL[q_{00}] = \{\lambda\}$
- $KL[q_{a0}] = \{w = ax \mid |w|_b \bmod 2 = 0\}$  – slová začínajúce  $a$  s párnym počtom  $b$
- $KL[q_{b0}] = \{w = bx \mid |w|_b \bmod 2 = 0\}$  – slová začínajúce  $b$  s párnym počtom  $b$
- $KL[q_{a1}] = \{w = ax \mid |w|_b \bmod 2 = 1\}$  – slová začínajúce  $a$  s nepárnym počtom  $b$
- $KL[q_{b1}] = \{w = bx \mid |w|_b \bmod 2 = 1\}$  – slová začínajúce  $b$  s nepárnym počtom  $b$

Pozrite sa na KL triedy pôvodného modrého a čierneho automatu vyššie. Ako súvisia s KL triedami tohto automatu? Vidíte tam prienik jazykov? Ako by sa zmenil automat, keby sme nerobili prienik, ale zjednotenie (t.j. v pôvodnom jazyku by bolo „alebo”)? Zmenili by sa iba akceptačné stavy. Zamyslite sa, ktoré ďalšie stavy by boli v tomto prípade akceptačné.

Ak ste dokázali správnosť oboch automatov čierneho aj modrého, tak správnosť tohto už dokazovať nemusíte.

## 6. príklad

Zostrojte automat, ktorý rozoznáva jazyk  $L = \{w = x0 \mid x \in \{0,1\}^* \wedge |w|_1 \bmod 3 = 0\}$ . Z akých dvoch jazykov je  $L$  zložený? Pre každý zostrojte automat, dokážte ich správnosť, a pomocou modulárnej konštrukcie (simulácie) vytvorte automat pre jazyk  $L$ .

## Poznámky

### KL triedy

- Musíme zadať KL pre každý stav automatu.
- Zjednotenie KL tried pre všetky stavy sa musí rovnať  $\Sigma^*$ .
- Zjednotenie KL tried pre akceptačné stavy sa musí rovnať jazyku, ktorý automat rozoznáva.
- Teda - každé slovo nad abecedou musí patriť do nejakej KL triedy, a každé slovo z jazyka, ktorý automat rozoznáva, musí patriť do KL triedy jedného z akceptačných stavov.
- Prienik akýchkoľvek dvoch KL tried je prázdna množina - t.j. KL triedy sú disjunktné množiny.

### MI pre automat

- Najprv si zadefinujeme KL triedy pre všetky stavy, to bude naša hypotéza (overte si všetko, čo musí platiť o KL triedach).
- V báze postupne na slovách dĺžky 0, 1... zisťujeme, kde jednotlivé slová v automate skončia, a či naozaj patria do KL triedy daného stavu. Dokazujeme po takú dĺžku slov, kým v báze nepokryjeme všetky stavy.
- Indukčný predpoklad je, že náš automat správne rozoznáva slová dĺžky  $k \leq x$ , kde  $x$  je (konkrétna) dĺžka najdlhšieho slova z bázy.  $w, |w| = k, k \leq x$ .
- Indukčný krok - dokazujeme pre slová dĺžky  $k + 1$ .  $z = wa, |z| = k + 1, a \in \Sigma$ .
- Dokazujeme pre všetky KL triedy, do ktorých môže patriť  $w$  a pre každú triedu ešte pre každý symbol z abecedy, ktoré k nemu vieme "prilepiť", aby sme mali slovo  $z$ .

- Treba si uvedomiť, že slovo  $w$  nielen končí v stave  $q_i$ , ale má aj vlastnosti  $KL[q_i]$ . Tie využijeme v IK a pre každú možnosť ukážeme, že ak k slovu  $w$  s nejakými vlastnosťami pridáme symbol  $a$ , slovo  $z$  skončí v stave  $q_j$  a aj vlastnosťami bude patriť do triedy  $KL[q_j]$ .
- Častou chybou je, že iba píšete, čo by malo pre dané slovo platiť, ale nekontrolujete si, či to aj naozaj platí. Potom si nenájdete chyby, či neuvedomíte, že ste na nejakú možnosť pri definovaní KL tried zabudli. Takže si to vždy overte, pri zložitejších triedach môžete začať na konkrétnych príkladoch, snažte sa ale dostať k všeobecnému opisu.

### Modulárna konštrukcia

- Najprv treba zostrojiť oba automaty, z ktorých budeme skladať výsledný.
- Potom dokázať správnosť oboch automatov – t.j. že rozoznávajú jazyk, ktorý majú.
- Keď sme to dokázali, spravíme modulárnu konštrukciu (simuláciu). Budeme potrebovať  $n \times m$  stavov, ak  $n$  je počet stavov jedného automatu a  $m$  je počet stavov druhého. Odporúčam nové stavy indexovať kombináciou indexov z pôvodných automatov.
- Vstupným stavom bude taký stav, ktorý bol v oboch automatoch vstupný.
- Kam ide prechod zo stavu  $q_{ij}$  po znaku  $e$  zistíme tak, že sa najprv pozrieme, kam sa dostaneme zo stavu  $q_i$  po  $e$  v prvom automate (napr. do stavu  $q_k$ ) a potom kam sa dostaneme zo stavu  $q_j$  po  $e$  v druhom automate (napr. do stavu  $q_l$ ). Kombináciou výsledkov dostaneme výsledný stav ( $q_{kl}$ ).
- Akceptačné stavy budú:
  - (a) Ak robíme *prienik* automatov, tak všetky ktoré sú akceptačné pre *oba* automaty.
  - (b) Ak robíme *zjednotenie* automatov, tak všetky, ktoré sú akceptačné *aspoň pre jeden* automat.
  - (c) Ak robíme *rozdiel* automatov, tak všetky, pre ktoré je *prvý akceptačný a druhý nie*.
- Výsledný automat už dokazovať nemusíme.