

1. príklad

- (a) Majme abecedu $\Sigma = \{0, 1\}$. Vymyslite aspoň tri príklady jazykov nad touto abecedou. Sú vaše jazyky konečné alebo nekonečné?
- (b) Majme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Vymyslite dva konečné jazyky L_1, L_2 nad abecedou Σ .
- $L_1 \cup L_2 = ?$
 - $L_1 \cap L_2 = ?$
 - $L_1.L_2 = ?$
 - $L_2.L_1 = ?$
- (c) Čo z bežného (informatického) života môže byť jazykom? Nad akou abecedou?
- (d) Majme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ a jazyk $L = \cup_{n=1}^6 \Sigma^n$. Koľko slov z jazyka má vlastný prefix ab ?
- (e) Máme abecedu Σ_{bool} a jazyky $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ také, že:
- $A = \{0, 1, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$
 - $B = \{w \in \Sigma_{bool}^* \mid |w| \geq 2\}$
 - $C = \{w \in \Sigma_{bool}^* \mid |w| \leq 2\}$

Určite jazyky:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A - B$
- $A \cap C$
- $B \cup C$
- $B \cap C$

Riešenie 1.e

Najprv si slovne popíšme, aké slová obsahujú jazyky B a C. V jazyku B sú slová nad Σ_{bool} dĺžky aspoň 2. Do jazyka C patria všetky slová Σ_{bool} dĺžky maximálne 2, čiže $\{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$.

- (a) $A \cup B = \{w \in \Sigma_{bool}^* \mid |w| \geq 1\} = \Sigma_{bool}^+$

(b) $A \cap B = \{00, 11, 000, 111, 0000, 1111\}$

(c) $A - B = \{0, 1\}$

(d) $A \cap C = \{0, 1, 00, 11\}$

(e) $B \cup C = \Sigma_{bool}^*$

(f) $B \cap C = \{w \in \Sigma_{bool}^* \mid |w| = 2\} = \Sigma_{bool}^2$

2. príklad

Majme abecedu Σ , nech $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Dokážte, alebo vyvráťte že:

(a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

(b) Ak $A \subseteq B$, potom pre každé $n \in \mathbb{Z}^+$ platí, že $A^n \subseteq B^n$.

(c) Platí nasledovná rovnosť $A(B \cap C) = AB \cap AC$, pre jazyky nad abecedou $\Sigma = \{0\}$?

(d) Nech $A \subseteq \Sigma_1^*$ a $B, C \subseteq \Sigma_2^*$ pre abecedy Σ_1, Σ_2 také, že $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Platí $A(B \cap C) = AB \cap AC$?

(e) Ak $A^2 = B^2$, potom $A = B$.

Riešenie 2.b

Túto implikáciu dokážeme pomocou matematickej indukcie.

- Báza: Ukážeme, že tvrdenie platí pre triviálny prípad, čiže v našom prípade pre $n = 1$. Ak $A \subseteq B$, potom $A^1 \subseteq B^1$. Prvá mocnina jazyka je jazyk samotný, preto to samozrejme platí.
- Indukčný predpoklad: Predpokladáme, že tvrdenie platí pre $n = k$. Čiže Ak $A \subseteq B$, potom $A^k \subseteq B^k$, pre $k \in \mathbb{Z}^+$.
- Indukčný krok: Ideme dokázať, že ak je splnený IP, tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$. Nech $x \in A^{k+1}$ potom (z def. mocniny jazyka) $x \in \{x_1x_2 \mid x_1 \in A, x_2 \in A^k\}$. Vychádzame z predpokladu, ak $A \subseteq B$ a $x_1 \in A$, potom aj $x_1 \in B$. Tiež z IP, ak $A^k \subseteq B^k$ a $x_2 \in A^k$, potom aj $x_2 \in B^k$. Čiže, $x \in \{x_1x_2 \mid x_1 \in B, x_2 \in B^k\} = B^{k+1}$.

3. príklad

Majme abecedu $\Sigma = \{0, 1\}$.

- (a) Nech $A = \Sigma^2$. Čo je potom A^* ?
- (b) Nech A je rovnaké ako v časti (a), a $B = \{0, 1\}$. Aké slová obsahuje jazyk BA^* ?
- (c) Aký je rozdiel medzi jazykmi $\{0\}\{0, 1\}^*$ a $\{0\}\{0, 1\}^+$? Čo obsahujú?
- (d) Ako zapíšete jazyk všetkých slov nad abecedou Σ , ktoré obsahujú sufix 11?
- (e) Ako zapíšete jazyk všetkých slov nad abecedou Σ , ktoré obsahujú podslovo 010?
- (f) Čo budeme musieť zmeniť v riešení predchádzajúcich dvoch úloh, aby jazyky obsahovali slová s vlastným sufixom resp. vlastným podslovom?
- (g) Do ktorých z nasledovných jazykov nad Σ^* patrí slovo 00010?
 - (i) $\{0, 1\}^*$
 - (ii) $\{00\}\{0\}^*\{10\}$
 - (iii) $\{000, 101\}\{10, 11\}$
 - (iv) $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}$
 - (v) $\{00\}^*\{10\}^*$
 - (vi) $\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*$

4. príklad*

Zapíšte jazyk $L = \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\}$ ako prienik dvoch jazykov L_1 a L_2 , ktoré spĺňajú súčasne nasledujúce podmienky:

- (a) $L_1 \not\subseteq L_2, L_2 \not\subseteq L_1$
- (b) $L_1, L_2 \subseteq \{0\}^+\{1\}^+\{2\}^+$
- (c) $L_1 - L$ a $L_2 - L$ sú nekonečné jazyky.

Odôvodnite.

Riešenie 4. príkladu

- (a) Hľadáme jazyky, ktoré sú rôzne, ale ich druhé mocniny sú rovnaké. Môžeme skúšať hľadať takéto konečné jazyky, uvažovať, že potrebujeme nejaké slovo vyskladať iným spôsobom, ako vznikne v druhom jazyku. Mohli by ste navrhnúť napr. takúto dvojicu jazykov: $A = \{a, aaa\}$, $B = \{\lambda, aa, aaaa\}$.

Pozrime sa na ich druhé mocniny. $A^2 = \{aa, aaaa, aaaaaa\} = \{a^2, a^4, a^6\}$. $B^2 = \{\lambda, aa, aaaa, aaaaaa\} = \{\lambda, a^2, a^4, a^6\}$. Vidíme, že sú takmer rovnaké, presnejšie $A^2 \subset B^2$, ale nie sú rovnaké, lebo v B^2 je aj prázdne slovo λ . Je častou chybou, že si neuvedomíte, že $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.

Z toho vyplýva, že nevieme mať dva jazyky, v ktorých v jednom prázdne slovo je a v druhom nie je. Keby sme dali do oboch prázdne slovo, tak v ich druhých mocninách by bol aj jazyk samotný (jazyk zretazený s prázdny slovom), čo by nám to opäť mohlo pokaziť.

Pri konečných jazykoch bude ich druhá mocnina vždy obsahovať viac slov¹ (zamyslite sa, prečo). Tak skúsme nájsť nejaké nekonečné jazyky.

Nech $A = \{\lambda, a, aa\ldots\} = \{a^k \mid k \in N\}$.

$B = \{\lambda, a, aaa, aaaa\ldots\} = \{a^k \mid k \in N, k \neq 2\}$

Ich druhé mocniny budú rovné $A^2 = B^2 = A = \{a^k \mid k \in N\}$, keďže slovo aa v B^2 vznikne zretazením $a.a$. Vidíme, že tieto jazyky rovnaké nie sú, ale ich druhé mocniny áno.

- (b) Jazyk L je nekonečný. Keďže $L_1 - L$, $L_2 - L$ sú nekonečné jazyky, tak aj L_1 a L_2 budú nekonečné. Aby sme splnili podmienku (ii) a zároveň, aby sme jednoznačne vedeli povedať, že $L_1 \cap L_2 = L$, použijeme jazyk L s miernymi úpravami pre oba jazyky.

Nech: $L_1 = \{0^{m+k} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m, k \geq 1\}$

$L_2 = \{0^{m+4} 1^{lm} 2^{m+3} \mid m, l \geq 1\}$.

Čo sme zmenili? V oboch jazykoch pribudol jeden parameter navyše. Čo to znamená? Skúsme si obaja jazyky napísať ako zjednotenie jazykov postupnou iteráciou týchto parametrov.

Čiže: $L_1 = \{0^{m+1} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+2} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+3} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \dots$

$L_2 = \{0^{m+4} 1^m 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{3m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \cup \{0^{m+4} 1^{4m} 2^{m+3} \mid m \geq 1\} \dots$

¹okrem jazyka $\{\lambda\}$

Vidíme, že jazyk L je podmnožinou oboch týchto jazykov. Je aj ich prienikom? V jazyku L_1 budú rovnaké slová ako v L_2 iba ak v jazyku L_1 bude $k = 4$ a zároveň v jazyku L_2 bude $l = 2$. Pre iné hodnoty k, l slová z jedného jazyka nebudú patriť do druhého (a opačne).

Ako budú vyzeráť $L_1 - L$ a $L_2 - L$? Pozrime sa vyššie. Vidíme, že ak z oboch jazykov vynecháme jazyk L , parametre k, l nemôžu nadobudnúť hodnoty 4 resp. 2. To znamená, že:

$$L_1 - L = \{0^{m+k} 1^{2m} 2^{m+3} \mid m, k \geq 1, k \neq 4\}.$$

$$L_2 - L = \{0^{m+4} 1^{lm} 2^{m+3} \mid m, l \geq 1, l \neq 2\}.$$

Oba jazyky sú nekonečné (podmienka (iii)), keďže množina celých kladných čísel okrem 4 (resp. okrem 2) je nekonečná. Podmienku (ii) sme splnili, v jazyku L_1 by mohlo byť aj $k = 0$, keďže $m \geq 1$, čiže tam vždy bude aspoň jedna nula. V jazyku L_2 nemôže byť $l = 0$, keďže v takom prípade by v slovách neboli žiadne jednotky.

A čo s podmienkou (i)? Pozrime sa na slovo z jazyka L_1 , keď $m = 1 \wedge k = 1$. $w = 0^{1+1} 1^2 2^{1+3} = 00112222$. Toto slovo sa určite nebude nachádzať v jazyku L_2 . Prečo? Lebo pre $m = 1$ bude v slovách z jazyka L_2 päť núl, dve nuly sa v žiadnom slove z L_2 nachádzať nebudú. To znamená, že $L_1 \not\subseteq L_2$.

Skúsme to aj opačne. Pre $m = 1 \wedge l = 1$ bude slovo $w = 0^{1+4} 1^{1 \cdot 1} 2^{1+3} = 0000012222$. Toto slovo nepatrí do jazyka L_1 , keďže v ňom budú vždy slová, ktoré majú párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že $L_2 \not\subseteq L_1$.

5. príklad*

Skonstruujme automat, ktorý ponúka tri nápoje (Kávu, Čaj, Mlieko), pričom každý z nich stojí 30 centov. Automat berie 10 centové a 20 centové mince, výdavok nevracia. Tlačidlo pre výber nápoja vieme stlačiť hocikedy, ale nápoj nám automat vydá jedine vtedy, ak stlačíme tlačidlo potom, ako sme už vhodili 30 centov.

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
STAV	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
VSTUP	10c	10c	10c	K	λ
VÝSTUP	nič	nič	nič	nič	nápoj

Tabuľka 1: Správanie automatu pri vhodení 3x10c mincí a výbere kávy

	t_0	t_1	t_2	t_3
STAV	q_0	q_2	q_3	q_4
VSTUP	20c	10c	Č	λ
VÝSTUP	nič	nič	nič	nápoj

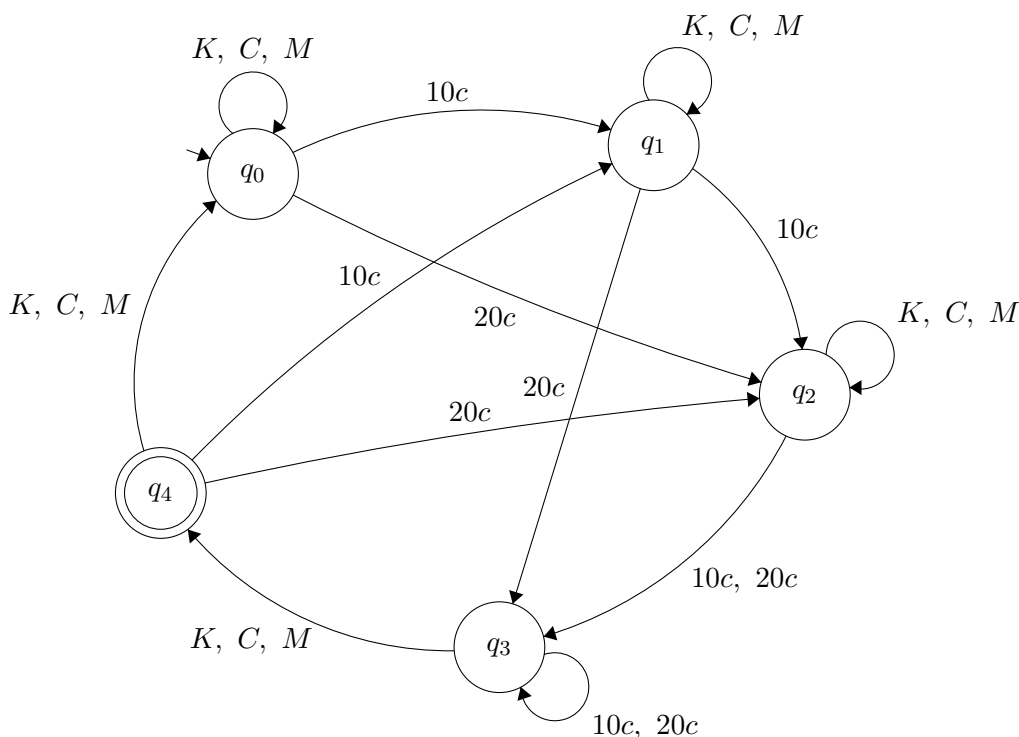
Tabuľka 2: Správanie automatu pri vhození 20c, 10c a výbere čaju

- Nakreslite podľa tabuliek stavový diagram pre automat. Ktoré prechody tam musíme dokresliť, aby bol deterministický?
- Definujte automat pomocou päťice z prednášky.
- Aká bude počiatočná konfigurácia pre prípady z tabuliek?
- Odsimulujte výpočet pre obe konfigurácie.
- Odsimulujte výpočet pre nejaký ďalší prípad. Je to akceptujúci alebo zamietajúci výpočet?
- Čo by sme museli zmeniť v automате, aby vracal výdavok? Čo by si musel automat pamätať a ako to vieme zabezpečiť?

Riešenie 5. príkladu

- Pozrime sa najprv na tabuľky. V prvej vidíme, že sme začali v stave q_0 , vhodili 10c, automat ešte nič nevrátil, ale posunul sa do stavu q_1 . Tam sme opäť vhodili 10c, posunuli sme sa do stavu q_2 . Ešte raz sme vhodili 10c, posunuli sa do stavu q_3 . Tam sme stlačili tlačidlo Káva, automat sa posunul do stavu q_4 a vydal nám nápoj. V druhej tabuľke sme preskočili stav q_1 , lebo sme rovno hodili 20c. Keď sa nad tým zamyslíme, zistíme, čo znamenajú jednotlivé stavy.

Stav q_0 je vstupný (začiatočný), v ktorom ešte automat neviduje žiadne vhozené mince. V stavoch q_1, q_2, q_3 sa nachádza, ak sme doň už hodili 10, 20 alebo 30 centov. Nápoj vydáva v stave q_4 , ak sme už hodili 30 centov (a teda boli v stave q_3) a vybrali si nápoj. Ak tlačidlo pre ľubovoľný nápoj stlačíme v inom stave, automat sa neposunie do iného stavu, keďže suma vhozených peňazí sa nezmení. Čo ak hodíme viac ako 30 centov? Podľa zadania automat čaká, kým stlačíme tlačidlo s voľbou nápoja, čiže hocikakú sumu nad 30 centov budeme brať ako 30 centov a stav automatu sa meniť nebude.



Obr. 1: Riešenie príkladu 5

Čo sa stane, keď už vydáme nápoj a stlačíme opäť nejaké iné tlačidlo? Ak by sa stav automatu nezmenil, stačilo by raz vhodiť 30 centov a mali by sme nekonečné nápoje², preto sa musíme niekam posunúť. Keďže aktuálny stav vhođených mincí je 0 centov, posunieme sa do q_0 . Čo ale ak sme v stave q_4 , automat nám vydal nápoj a my vhodíme 10 centov? Mal by to zaevidovať a teda nás posunúť do stavu q_1 . Rovnako tak, ak vhodíme 20 centov, tak nás posunie do stavu q_2 .

Výsledný automat vidíte na obrázku 1.

- (b) Definujeme: $\Sigma = \{10c, 20c, K, C, M\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, počiatkový stav je q_0 , akceptačný stav je iba jeden, preto $F = \{q_4\}$ a prechodovú funkciu si môžeme skúsiť zapísať aj do tabuľky.
- (c) Počiatočná konfigurácia pre prvú tabuľku bude $(q_0, 10c.10c.10c.K)$ a

²čomu by sa asi prevádzkovateľ automatu nepotešil

δ	10c	20c	K	C	M
q_0	q_1	q_2	q_0	q_0	q_0
q_1	q_2	q_3	q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_3	q_2	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3	q_4	q_4	q_4
q_4	q_1	q_2	q_0	q_0	q_0

Tabuľka 3: Prechodová funkcia

pre druhú tabuľku $(q_0, 20c.10c.C)$.

- (d) Simuláciu výpočtu môžeme spraviť dvomi spôsobmi, buď použijeme prechodovú funkciu, alebo reflexívno tranzitívny uzáver relácie krok stroja. Pre každú konfiguráciu použijem iný, aby sme si ukázali oba.
- $\hat{\delta}(q_0, 10c.10c.10c.K) = \hat{\delta}(q_1, 10c.10c.K) = \hat{\delta}(q_2, 10c.K) = \hat{\delta}(q_3, K) = \delta(q_4, \lambda)$ Skončili sme v stave q_4 , preto je tento výpočet akceptujúci.
- $(q_0, 20c.10c.C) \vdash_M (q_2, 10c.C) \vdash_M = (q_3, C) \vdash_M (q_4, \lambda)$. Opäť sme skončili v stave q_4 , čiže tento výpočet je akceptujúci.
- (e) Skúsme vymyslieť zamietajúci výpočet a ten odsimulovať. Čo ak si vypýtame nápoj skôr, ako hodíme dosť peňazí? Napr. $(q_0, 20c.M) \vdash_M (q_2, M) \vdash_M (q_2, \lambda)$. Ďalším zamietajúcim výpočtom bude aj situácia, ak tam vhodíme napr. 50 centov, ale nestlačíme žiadne tlačidlo. Napr. $(q_0, 20c.10c.10c.10c) \vdash_M (q_2, 10c.10c.10c) \vdash_M = (q_3, 10c.10c) \vdash_M (q_3, 10c) \vdash_M (q_3, \lambda)$.
- (f) Nad touto úlohou sa zamyslite. Koľko stavov by sme museli pridať, aby si automat vedel zapamätať, že má vydať 10, 20, 30... centov? Kedy by automat mince vydával?