

1. príklad

- (a) Majme abecedu $\Sigma = \{0, 1\}$. Aké slová dĺžky dva nad ňou existujú? Koľko je nad ňou slov dĺžky 3?
- (b) Majme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Koľko slov dĺžky dva nad ňou existuje? Koľko slov má dĺžku maximálne 5?

Riešenie 1. príkladu

- (a) Slová dĺžky dva sú: 00, 01, 10, 11. Na každú pozíciu v slove máme dve možnosti, aký znak tam dať. Pri slovách dĺžky tri obsadzujeme 3 pozície, preto takýchto slov bude 2^3 .
- (b) Pri štvorprvkovej abecede máme na každú pozíciu 4 možnosti. Slov dĺžky dva tak bude 4^2 . Slov dĺžky maximálne 5 zistíme ako súčet slov dĺžky 0 až 5.
- $|w| = 0$: $\{\lambda\}$ 1
 - $|w| = 1$: $\{a, b, c, d\}$ 4
 - $|w| = 2$: $\{aa, ab, ac, ad, bb, ba, bc, bd, cc, ca, cb, cd, dd, da, db, dc\}$ 4^2
 - $|w| = 3$: $\{aaa, aab, \dots\}$ 4^3
 - $|w| = 4$: $\{aaaa, aaab, \dots\}$ 4^4
 - $|w| = 5$: $\{aaaaa, aaaab, \dots\}$ 4^5

Vieme to zapísať aj ako:

$$\sum_{i=0}^5 4^i$$

Viete vyjadriť počet slov dĺžky n nad k -prvkovou abecedou?

2. príklad

Máme abecedu $\Sigma_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

- (a) Koľko slov nad Σ dĺžky 5 existuje?
- (b) Koľko z nich sú správne zapísané päťciferné čísla v desiatkovej sústave?
- (c) Koľko z nich je palindromov (čítajú sa rovnako sprava aj zľava)?
- (d) O koľko viac je palindromov dĺžky 6 ako palindromov s dĺžkou 5?

Riešenie 2. príkladu

- (a) Riešime rovnako v prechádzajúcom príklade. Máme 5 pozícií, 10-prvkovú abecedu, preto slov dĺžky 5 nad touto abecedou bude 10^5 .
- (b) Aby slovo bolo správne zapísané 5-ciferné číslo, na prvom mieste nemôže byť 0. Preto na prvú pozíciu máme iba 9 možností na výber znaku z abecedy, na všetky zvyšné je tých možností 10 (tam už môže byť 0). Preto počet vyjadríme ako: $9 \cdot 10^4$.
- (c) Aby bolo slovo dĺžky 5 palindromom, musí vyzeráť takto: XYZYX (kde X, Y aj Z sú nejaké znaky z abecedy, čiže napr. 98787, 12021, ale aj 55555). Čiže znak na začiatku bude aj na konci slova, druhý znak bude rovnaký ako štvrtý znak, a v strede môže byť hocičo. Z toho vyplýva, že potrebujeme iba tri znaky, štvrtý a piaty doplníme podľa prvých dvoch. Počet týchto slov preto bude rovný 10^3 .

Prečo musíme rátať aj možnosti pre Z, keď to môže byť hocičo? Keby sme ich nerátali, tak pre slová ako napr. 12021, 12121, 12321... by sme zarátali iba jedno. Vidíme ale, že takýchto slov, ktoré začínajú 12 a končia 21 je 10.

Čo ak by sme chceli, aby tieto palindromy boli slová podľa (b)? Čo by sa zmenilo v našom výpočte? Jedine prvý (a teda aj posledný) znak by nemohol byť 0, čiže by sme mali 9 možností. Preto výsledok bude $9 \cdot 10^2$.

- (d) Akým spôsobom vieme zapísať palindromy dĺžky 6? Ak použijeme rovnaký zápis ako v predošlom bode, tak budú vyzeráť takto: XYZZYX. Vidíme, že opäť vyberáme tri znaky, a zvyšné znaky budú rovnaké. Preto je jasné, že počet palindromov dĺžky 6 bude rovnaký ako počet palindromov dĺžky 5.

3. príklad

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

- (a) koľko slov nad Σ dĺžky 5 začína symbolom a ?
- (b) koľko slov nad Σ dĺžky 5 obsahuje práve 2 symboly a ?
- (c) koľko slov nad Σ dĺžky 5 neobsahuje žiadne a ?
- (d) koľko slov nad Σ dĺžky 5 obsahuje nepárny počet a ?

Riešenie 3. príkladu

- (a) Ak má slovo začínať symbolom a , potom nám zostávajú iba 4 miesta, ktoré potrebujeme obsadiť. Na každé z nich máme 4 možnosti na výber znaku, preto takýchto slov bude 4^4 .
- (b) Chceme práve dva symboly a . Ako prvé ich preto musíme umiestniť. Vybrať dve miesta z piatich, na ktoré dáme a sa dá $\binom{5}{2}$ spôsobmi. Na zvyšné tri miesta vyberáme symboly už iba z $\{b, c, d\}$. Máme preto 3^3 možností. Dokopy to je $\binom{5}{2} \cdot 3^3$.
- (c) Ak slovo nemá obsahovať žiadne a , používame iba symboly $\{b, c, d\}$. Na každú z piatich pozícií máme tri možnosti a výsledok je tak 3^5 .
- (d) Aký počet áčok môže byť v slove dĺžky 5, aby bol nepárny? 5, 3 alebo 1. Rozoberme si to po možnostiach.
- Ak máme 1 a : najprv musíme vybrať, kam ho umiestnime. Máme 5 možností (keďže obsadzujeme 1 miesto z 5, vieme to zapísať aj ako $\binom{5}{1}$). Na zvyšné 4 pozície umiestnime nejaké zo zvyšných symbolov, čo nám dáva 3^4 možností.
 - Ak máme 3 a : opäť najprv vyberieme, kam umiestnime áčka. Vyberáme tri pozície z piatich, čo je $\binom{5}{3}$. Zvyšné dve miesta obsadíme b-čkom, c-čkom alebo d-čkom, čiže 3^2 .
 - Ak máme 5 a : už nám nezostali žiadne voľné miesta, preto je takéto slovo iba jedno, konkrétne $aaaaa$. Vieme to zapísať tak, ako v predchádzajúcich bodoch? Samozrejme. Vyberáme 5 pozícií z 5 $\binom{5}{5}$ a na 0 pozícií máme možnosť dať tri znaky, čiže 3^0 .

Teraz spočítame jednotlivé prípady: $\binom{5}{1} \cdot 3^4 + \binom{5}{3} \cdot 3^2 + \binom{5}{5} \cdot 3^0$. To vieme vyjadriť aj pomocou sumy:

$$\sum_{i=0}^2 \binom{5}{2i+1} \cdot 3^{5-(2i+1)}$$

Vieme pomocou takejto sumy zapísať aj slová dĺžky n s nepárnym počtom áčok? Čo sa bude meniť? No jednak musíme zmeniť 5 vo vnútri sumy (aj v kombinačnom čísle, aj v exponente) za n . Pokiaľ však pôjde i ? Alebo sa môžeme spýtať inak, koľko nepárnych čísel je menších alebo rovných ako n ? Ak je n párne, bude to presne polovica. Ak je n nepárne, bude to polovica plus 1, resp. polovica zaokrúhlená nahor, čo

je horná celá časť čísla. Keďže ale naša suma ide od 0, musíme odčítať

1. Výsledok vyzerá takto:

$$\sum_{i=0}^{\lceil n \rceil - 1} \binom{n}{2i+1} \cdot 3^{n-(2i+1)}$$

Ako sa zmení suma, ak počet áčok bude párny? Zamyslite sa.

4. príklad

Máme slovo *abeceda*.

- (a) Koľko má prefixov? Koľko z nich je vlastných?
 - (i) Koľko prefixov má slovo dĺžky n ?
- (b) Koľko má sufixov? Koľko z nich je vlastných?
 - (i) Koľko sufixov má slovo dĺžky n ?
- (c) Koľko má podslov? Koľko z nich je vlastných?
 - (i) Aký je maximálny počet podslov v slove dĺžky n ? Prečo hovoríme o maximálnom počte?
 - (ii) Aký je minimálny počet podslov v slove dĺžky n ? Nájdite príklad takého slova dĺžky 5.

Riešenie 4. príkladu

- (a) Prefixy sú všetky tieto slová: $\lambda, a, ab, abe, abec, abece, abeced, abeceda$. Z nich vlastné sú všetky okrem λ a *abeceda*. Čiže také, ktoré keď zo slova vezmeme, tak zvyšok bude neprázdne slovo.
 - (i) Pre slovo dĺžky n vieme počet prefixov vyjadriť ako $n + 1$. Máme n pozícií, po ktorú berieme prefix (od prvého po posledný znak), plus prázdne slovo.
- (b) Suffixy sú všetky tieto slová: $\lambda, abeceda, beceda, eceda, ceda, eda, da, a$. Z nich vlastné sú všetky okrem λ a *abeceda*. Čiže opäť také, ktoré keď zo slova vezmeme, tak zvyšok bude neprázdne slovo.

- (i) Ich počet je rovnaký ako počet prefixov. Pre slovo dĺžky n vieme počet sufixov vyjadriť ako $n + 1$. Máme n pozícií, od ktorej berieme sufix (od prvého po posledný znak), plus prázdne slovo.
- (c) Aby sme zistili počet podslov slova dĺžky n , pozrime sa na podslová slova *abceda* po jednotlivých dĺžkach.

- slová dĺžky 0: λ
- slová dĺžky 1: a, b, e, c, e, d, a . Tu vidíme, že sa niektoré zopakovali, čiže toto slovo nebude mať maximálny počet podslov.
- slová dĺžky 2: ab, be, ec, ce, ed, da
- slová dĺžky 3: abe, bec, ece, ced, eda
- slová dĺžky 4: $abec, bece, eced, ceda$
- slová dĺžky 5: $abece, beced, eceda$
- slová dĺžky 6: $abeced, beceda$
- slová dĺžky 7: *abceda*

Vidíme, že sa ich počet vždy znižuje o jedna.

- (i) Pre slová dĺžky n , tak vieme maximálny počet podslov vyjadriť ako

$$1 + \sum_{i=1}^n i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Prečo hovoríme o maximálnom počte? Lebo už v našom príklade sa niektoré podslová opakujú (konkrétne a, e . Môžu byť slová, kde sa bude opakovať ešte viac podslov, napríklad $abababab = (ab)^4$. (Skúste zistiť, ktoré podslová sa v tomto slove zopakujú.)

Existujú slová, ktoré budú mať maximálny počet podslov. Napr. slovo *abec,auto*, či *abcdefghijklmnopqrstuvwxyz*.

- (ii) Sú aj slová, ktoré majú málo podslov. Napr. slovo $aaaaa = a^5$, alebo slovo *xxxxx*. Tie budú mať 6 podslov ($\lambda, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa$), v prípade slova dĺžky n to bude $n + 1$ podslov. Koľko bude vlastných podslov? O dve menej.

5. príklad

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

- (a) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*, |w| \leq 6$, má prefix ab ?
- (b) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*, |w| \leq 6$, má sufix ab ?
- (c) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*, |w| \leq 6$, obsahuje podslovo ab ?
- (d) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*, |w| \leq 6$, obsahuje podslovo aba ?

Riešenie 5. príkladu

- (a) Najkratšie také slovo je iba ab , čiže 1.

Pre slová dĺžky 3 sú také slová 4: ab a za ním ktorýkoľvek znak z abecedy.

Pre slová dĺžky 4 máme po ab dve voľné pozície, čiže slov bude 4^2 .

Pre slová dĺžky 5 to bude 4^3 . A takýchto slov dĺžky 5 bude 4^4 .

Dokopy to je: $\sum_{i=0}^4 4^i$

- (b) Počet slov so sufixom ab je rovnako veľa ako v (a), zamyslite sa, prečo je to tak.
- (c) Slová, ktoré obsahujú podslovo ab si tiež rozoberme po jednotlivých dĺžkach.

- Slovo dĺžky 2 bude 1 (ab).
- Slovo dĺžky 3 bude viac. Buď bude ab prefix, alebo bude sufix. Máme tak dve možnosti, kam ab umiestnime a na voľné miesto máme 4 možnosti na výber znaku. Čiže dokopy to je $2 \cdot 4$ možností.
- Pre slová dĺžky 4 musíme zistiť, koľko je možností na umiestnenie ab v slove – zostanú nám ešte dve prázdne miesta, čiže umiestňujeme ab na jedno miesto z troch. Na zvyšné dve miesta máme po 4 možnostiach, aký znak tam bude. To je $\binom{3}{1} \cdot 4^2$

Čo sa ale môže stať? Slovo $abab$ mohlo vzniknúť dvakrát. Raz sme napevno dali ab na začiatok a zvyšné dva znaky sa vygenerovali takto, druhýkrát sme ab dali napevno nakoniec a prvé dva znaky sa vygenerovali. Preto od hodnoty vyššie musíme odčítať 1. Výsledok tak je $\binom{3}{1} \cdot 4^2 - 1$.

- Pre slová dĺžky 5 postupujeme rovnako. Teraz umiestňujeme ab na jednu zo štyroch možností, a na tri miesta ľubovoľné znaky. To nám dá: $\binom{4}{1} \cdot 4^3$.

Problémom zas bude, ak sa ab v slove vyskytne dvakrát. Zistíme počet takýchto slov. Máme dve ab a ešte nám ostane jedna voľná pozícia. Umiestnime podslová na dve z troch pozícií a na zvyšnú dáme ľubovoľný znak z abecedy. Čiže takýchto slov je $\binom{3}{2} \cdot 4^1$.

Výsledný počet slov dĺžky 5 s podslovom ab je preto $\binom{4}{1} \cdot 4^3 - \binom{3}{2} \cdot 4^1$

- Pri slovách dĺžky 6 máme 5 pozícií, z toho 4 budú ľubovoľné znaky, preto: $\binom{5}{1} \cdot 4^4$.

Problematické slová budú také, kde je dvakrát podslovo ab , čo znamená že máme 4 pozície, na dve dáme ab a na dve ľubovoľný znak z abecedy. Čo je $\binom{4}{2} \cdot 4^2$ slov.

A ešte je jedno slovo, ktoré musíme brať do úvahy, a to slovo $ababab$, také je iba 1. Najprv sme ho trikrát vygenerovali (ab mohlo byť fixne na jednej z troch pozícií), potom sme ho trikrát odčítali (ab mohli byť fixne na dvoch z troch pozícií, čo sú tiež tri možnosti), preto ho musíme ešte pričítať.

Výsledok je $\binom{5}{1} \cdot 4^4 - \binom{4}{2} \cdot 4^2 + 1$

- (d) Aké problémy môžu nastať pri tomto slove? Zamyslite sa a vyriešte tento príklad samostatne.

6. príklad*

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$.

- Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje najviac 2 a ?
- Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje aspoň 3 b ?
- Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje najviac 2 a a zároveň aspoň 3 b ?