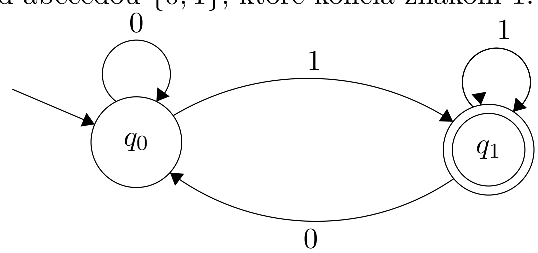
1. príklad

Spomeňte si na automat z minulého cvičenia. Formálny zápis už máme, teraz skúsme dokázať, že naozaj rozoznáva jazyk obsahujúci všetky slová nad abecedou $\{0, 1\}$, ktoré končia znakom 1.



Riešenie 1. príkladu

Už minule sme si povedali, že v stave q_0 skončia slová, ktoré končia znakom 0 a v stave q_1 skončia slová, ktoré končia znakom 1. Zapíšme to formálne:

- $KL[q_0] = \{\lambda, w0 \mid w \in \Sigma^*\}$
- $KL[q_1] = \{w1 \mid w \in \Sigma^*\}$

Toto bude našou hypotézou, ktorú budeme overovať pomocou matematickej indukcie (MI). [1]

Báza indukcie Spravíme výpočet na automate pre slová dĺžky 0 a vyššie, pokiaľ sa nedostaneme do všetkých stavov.

- *slová dĺžky 0:* $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = q_0 \implies \lambda \in KL[q_0]$.
- *slová dĺžky 1:*
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_0 \implies 0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_1 \implies 1 \in KL[q_1]$.

[1] Ešte predtým sa ale musíme zamyslieť, či (1) KL triedy sú vzájomne disjunktné (zjavne slovo nevie končiť aj 0 aj 1, takže sú), či (2) každé slovo nad abecedou patrí do práve jednej KL triedy (máme tam priamo spomenuté aj prázdne slovo, zvyšné slová nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ vieme jednoznačne zaradiť do jednej KL triedy), či (3) zjednotenie všetkých KL tried bude obsahovať všetky slová z Σ^* (zjavne áno), a či (4) zjednotenie KL tried akceptačných stavov dá jazyk, ktorý má automat rozoznať (máme len jeden akceptačný stav, takže áno).

Obe slová 0 a 1 vieme napísať ako $\lambda 0$ a $\lambda 1$, čiže je zrejmé, že patria do KL tried stavov, v ktorých skončili. Dostali sme sa do všetkých stavov, báza indukcie je preto kompletná.

Indukčný predpoklad: Predpokladáme, že hypotéza platí pre všetky slová dĺžky $k, k \leq 1$. Alebo zapísané inak: slová $w \in \Sigma^*$, kde $|w| = k, k \leq 1$ (keďže platnosť hypotézy pre slová týchto dĺžok sme dokázali v báze).

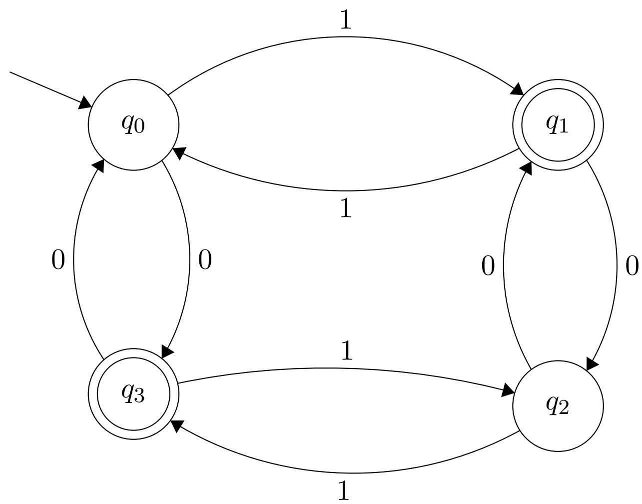
Indukčný krok: Ak dokážeme, že naša hypotéza platí pre všetky slová dĺžky $k + 1$, kde $k \geq 1$, dokážeme všeobecnú platnosť našej hypotézy. Slová tejto dĺžky vieme zapísať ako $z = wa$, kde $w \in \Sigma^*, |w| = k$ a $a \in \Sigma$. O w môžu platiť dve veci - buď bude končiť 0 alebo bude končiť 1. Musíme ich obe rozobrať.

- w končí 0, takže z IP vieme, že patrí do $KL[q_0]$. Teraz nám opäť vzniknú dva prípady - $a = 0$ alebo $a = 1$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_0, 0) = q_0$. Slovo $w0$ končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že $z0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$. Slovo $w1$ končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že $w1 \in KL[q_1]$.
- w končí 1, takže z IP vieme, že patrí do $KL[q_1]$. Teraz nám opäť vzniknú dva prípady - $a = 0$ alebo $a = 1$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 0) = \delta(q_1, 0) = q_0$. Slovo $w0$ končí nulou, takže spĺňa našu hypotézu, že $z0 \in KL[q_0]$.
  - $\hat{\delta}(q_0, w1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1$. Slovo $w1$ končí jednotkou, takže spĺňa našu hypotézu, že $w1 \in KL[q_1]$.

Dokázali sme platnosť našej hypotézy. Čiže sme dokázali platnosť KL tried, a teda aj to, že jazyk rozpoznáva slová končiace 1 (tj. slová, ktoré skončia v stave q_1, čomu zodpovedá $KL[q_1]$).

2. príklad

Aký jazyk rozpoznáva automat na obrázku? Dokážte to.



Idea riešenia 2. príkladu

Skúsme zistiť, aký jazyk rozoznáva daný automat. V stave q_0 skončí určite prázdne slovo. Koľko jednotiek bude obsahovať slovo, ktoré skončí v q_0? Vieme sa tam dostať cez stav q_1, pričom na ceste $q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_0$ bude vždy párny počet jednotiek, hocikoľkokrát túto cestu zopakujeme. Môžeme prejsť až do q_2, ale všimnime si, že či sa do q_0 vrátime zo stavu q_3 alebo q_1, vždy prejdeme po párnom počte jednotiek (jednou vychádzame a druhou vchádzame). Rovnako to je pre q_0 s nulami – buď pôjdeme do q_3 a späť, čo vždy dá párny počet núl, alebo pôjdeme cez stav q_2 a opäť budeme potrebovať párny počet núl. V stave q_0 by tak mali končiť slová, ktoré majú párny počet núl a párny počet jednotiek. To vieme zapísať ako $KL[q_0] = \{w \mid |w|_0 \; mod\, 2 = 0 \wedge |w|_1 \; mod\, 2 = 0\}$

Ako sa vieme dostať do q_1? Buď priamo z q_0 a na ceste prečítame jednu jednotku, alebo pôjdeme cez q_3 a na ceste prečítame jednu jednotku a dve nuly. Hocijaký iný okruh, ktorý z q_1 spravíme, bude obsahovať párny počet núl aj jednotiek. To spočítané s tými, ktoré sme spravili pri prvom prechode do q_1 nám dáva nepárny počet jednotiek a párny počet núl. Čiže: $KL[q_1] = \{w \mid |w|_0 \; mod\, 2 = 0 \wedge |w|_1 \; mod\, 2 = 1\}$.

Do q_3 sa vieme dostať priamo z q_0 po jednej nule, alebo cez zvyšné stavy po dvoch jednotkách a jednej nule. Tiež tu platí to, čo v predchádzajúcich stavoch, ak z q_3 pôjdeme do iného stavu a späť, prečítame párny počet núl a/alebo párny počet jednotiek. Z toho vyplýva, že v tomto stave skončia slová, ktoré majú nepárny počet núl a párny počet jednotiek. $KL[q_3] = \{w \mid |w|_0 \; mod\, 2 = 1 \wedge |w|_1 \; mod\, 2 = 0\}$.

A čo stav q_2? Keď sa pozrieme na KL triedy zvyšných stavov, vidíme že nám chýbajú ešte slová, ktoré majú nepárny počet núl a nepárny počet jednotiek. Skontrolujme. Do q_2 sa vieme dostať cez q_1 prečítaním jednej jednotky a jednej nuly, alebo cez q_3 tiež prečítaním jednej nuly a jednej jednotky. Takže $KL[q_2] = \{w \mid |w|_0 \; mod \; 2 = 1 \wedge |w|_1 \; mod \; 2 = 1\}$.

Z toho vyplýva, že $L(M) = \{w \mid |w|_0 \; mod \; 2 = 1 \wedge |w|_1 \; mod \; 2 = 0\} \cup \{w \mid |w|_0 \; mod \; 2 = 0 \wedge |w|_1 \; mod \; 2 = 1\} = \{w \mid (|w|_0 + |w|_1) \; mod \; 2 = 1\}$.

Dokážte, že to platí.

3. príklad

Zostrojte DKA, ktorý rozoznáva jazyk L a dokážte jeho správnosť.

(a) $L_1 = \{ax \mid x \in \{a, b\}^*\}$

(b) $L_2 = \{1, 00, 01\}$; $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$

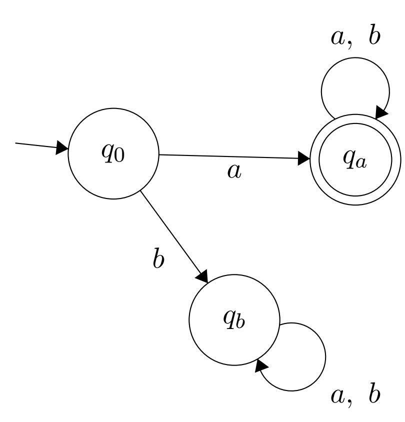
(c) $L_3 = \{awb \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

(d) $L_4 = \{w \mid |w|_b \; mod \; 2 = 1; w \in \{a, b, c\}^*\}$

(e) Dokážte správnosť automatov z minulého cvičenia.

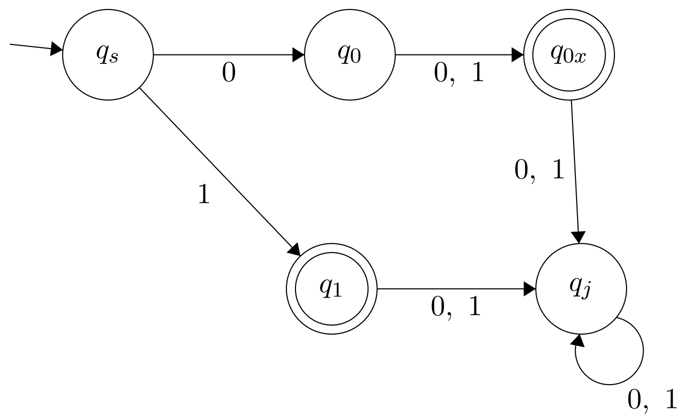
Návrh automatov z 3. príkladu

(a) Automat má rozoznávať slová, ktoré začínajú písmenom a, čo je po ňom, nás už nezaujíma. Môže to byť aj prázdne slovo, preto stav q_a môže byť akceptačným. Aby bol automat deterministický, potrebujeme vytvoriť aj stav, do ktorého sa dostaneme zo vstupu prečítaním b. To bude stav q_b – tam skončia všetky slová začínajúce b.



(b) Slovo 0 skončí v stave q_0, slová $00, 01$ skončia v q_{0x}, v stave q_1 skončí slovo 1 a v stave q_j všetky zvyšné slová. Čiže slová, ktoré začínajú jednotkou a majú dĺžku aspoň dva, a slová, ktoré začínajú nulou a majú dĺžku aspoň tri. $\{1w \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq 1\} \cup \{0w \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq 2\}$.

Je toto najmenší počet stavov, ktoré potrebujeme na rozpoznanie jazyka L_2? Vedeli by sme nejaké stavy zlúčiť? Zamyslite sa a navrhnite, ako by automat potom vyzeral.



(c) Jazyk L_3 obsahuje slová, ktoré začínajú áčkom a končia béčkom. V prípade, že na vstupe dostaneme b, slovo sa už nemôže dostať do akceptačného stavu (nevie už splniť prvú podmienku), preto sa presunieme do stavu, ktorý môžeme nazvať aj junk, či kôš[2]. Ak na vstupe prečítame a, máme splnenú prvú podmienku (čo si zapamätáme presunom do stavu q_a) a zisťujeme, či platí aj druhá, teda či slovo končí b. Čakáme preto, kým prečítame znak b (pri prečítaní a stav nemeníme, lebo slovo končí a), a vtedy sa presunieme do q_{ab}. Ak sme prečítali aspoň jedno b, je nám jedno, koľko ďalších b sa v slove nachádza, keďže sa nachádzajú na jeho konci. Ak však prečítame a, musíme sa presunúť do stavu q_a – slovo zjavne končí na a a nespĺňa druhú podmienku.

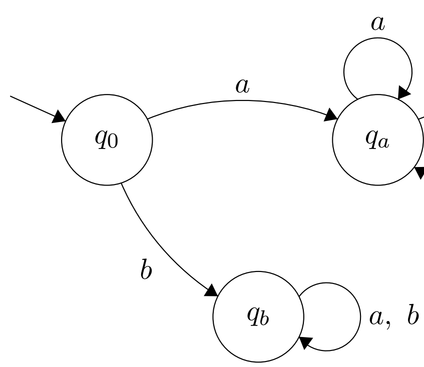
Už z tohto opisu by malo byť jasné, ako vyzerajú jednotlivé KL triedy. Skúsme si ich zapísať:

- $KL[q_0] = \lambda$
- $KL[q_b] = \{bw \mid w \in \Sigma^*\}$

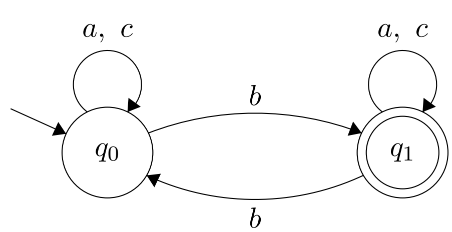
[2] tak budeme označovať stav, do ktorého ak sa dostaneme, tak sa už nevieme dostať preč

- $KL[q_a] = \{a\} \cup \{awa \mid w \in \Sigma^*\}$
- $KL[q_{ab}] = \{awb \mid w \in \Sigma^*\}$

Prečo sme pri $KL[q_a]$ museli samostatne napísať aj slovo $\{a\}$? Slovne vieme povedať, že slovo, ktoré skončí v q_a začína aj končí a, ale ak to zapíšeme ako zreťazenie awa, tak vidíme, že najkratšie také slovo bude slovo aa. KL množiny musia obsahovať všetky slová, ktoré v danom stave skončia, preto musíme pridať samostatne aj slovo a.



(d) Automat rozpoznávajúci jazyk L_4 je pomerne jednoduchý, má iba dva stavy. Sledujeme párnosť počtu béčok, preto nás nezaujíma počet áčok ani céčok, a stav zmeníme vždy po prečítaní béčka. V stave q_0 skončia slová s párnym počtom béčok, v stave q_1 skončia slová s nepárnym počtom béčok.



Dokážte správnosť týchto automatov využitím matematickej indukcie.

Poznámky

KL triedy

- Musíme zadefinovať KL pre každý stav automatu.

- Zjednotenie KL tried pre všetky stavy sa musí rovnať Σ^*.
- Zjednotenie KL tried pre akceptačné stavy sa musí rovnať jazyku, ktorý automat rozoznáva.
- Teda - každé slovo nad abecedou musí patriť do nejakej KL triedy, a každé slovo z jazyka, ktorý automat rozoznáva, musí patriť do KL triedy jedného z akceptačných stavov.
- Prienik akýchkoľvek dvoch KL tried je prázdna množina - t.j. KL triedy sú disjunktné množiny.

MI pre automat

- Najprv si zadefinujeme KL triedy pre všetky stavy, to bude naša hypotéza (overte si všetko, čo musí platiť o KL triedach).
- V báze postupne na slovách dĺžky 0, 1... zisťujeme, kde jednotlivé slová v automate skončia, a či naozaj patria do KL triedy daného stavu. Dokazujeme po takú dĺžku slov, kým v báze nepokryjeme všetky stavy.
- Indukčný predpoklad je, že náš automat správne rozoznáva slová dĺžky $k \leq x$, kde x je (konkrétna) dĺžka najdlhšieho slova z bázy. $w, |w| = k, k \leq x$.
- Indukčný krok - dokazujeme pre slová dĺžky $k + 1$. $z = wa, |z| = k + 1, a \in \Sigma$.
- Dokazujeme pre všetky KL triedy, do ktorých môže patriť w a pre každú triedu ešte pre každý symbol z abecedy, ktoré k nemu vieme "prilepiť", aby sme mali slovo z.
- Treba si uvedomiť, že slovo w nielen končí v stave q_i, ale má aj vlastnosti $KL[q_i]$. Tie využijeme v IK a pre každú možnosť ukážeme, že ak k slovu w s nejakými vlastnosťami pridáme symbol a, slovo z skončí v stave q_j a aj vlastnosťami bude patriť do triedy $KL[q_j]$.
- Častou chybou je, že iba píšete, čo by malo pre dané slovo platiť, ale nekontrolujete si, či to aj naozaj platí. Potom si nenájdete chyby, či neuvedomíte, že ste na nejakú možnosť pri definovaní KL tried zabudli. Takže si to vždy overte, pri zložitejších triedach môžete začať na konkrétnych príkladoch, snažte sa ale dostať k všeobecnému opisu.