1. príklad

(a) Majme abecedu $\Sigma = \{0, 1\}$. Aké slová dĺžky dva nad ňou existujú? Koľko je nad ňou slov dĺžky 3?

(b) Majme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Koľko slov dĺžky dva nad ňou existuje? Koľko slov má dĺžku maximálne 5?

Riešenie 1. príkladu

(a) Slová dĺžky dva sú: $00, 01, 10, 11$. Na každú pozíciu v slove máme dve možnosti, aký znak tam dať. Pri slovách dĺžky tri obsadzujeme 3 pozície, preto takýchto slov bude 2^3.

(b) Pri štvorprvkovej abecede máme na každú pozíciu 4 možnosti. Slov dĺžky dva tak bude 4^2. Slov dĺžky maximálne 5 zistíme ako súčet slov dĺžky 0 až 5.

- $|w| = 0$: $\{\lambda\}$ 1
- $|w| = 1$: $\{a, b, c, d\}$ 4
- $|w| = 2$: $\{aa, ab, ac, ad, bb, ba, bc, bd, cc, ca, cb, cd, dd, da, db, dc\}$ 4^2
- $|w| = 3$: $\{aaa, aab...\}$ 4^3
- $|w| = 4$: $\{aaaa, aaab...\}$ 4^4
- $|w| = 5$: $\{aaaaa, aaaab...\}$ 4^5

Vieme to zapísať aj ako:

$$\sum_{i=0}^{5} 4^i$$

Viete vyjadriť počet slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou?

2. príklad

Máme abecedu $\Sigma_{10} = \{0, 1, 2...9\}$.

(a) Koľko slov nad Σ dĺžky 5 existuje?

(b) Koľko z nich sú správne zapísané päťciferné čísla v desiatkovej sústave?

(c) Koľko z nich je palindromov (čítajú sa rovnako sprava aj zľava)?

(d) O koľko viac je palindromov dĺžky 6 ako palindromov s dĺžkou 5?

Riešenie 2. príkladu

(a) Riešime rovnako v prechádzajúcom príklade. Máme 5 pozícií, 10-prvkovú abecedu, preto slov dĺžky 5 nad touto abecedou bude 10^5.

(b) Aby slovo bolo správne zapísané 5-ciferné číslo, na prvom mieste nemôže byť 0. Preto na prvú pozíciu máme iba 9 možností na výber znaku z abecedy, na všetky zvyšné je tých možností 10 (tam už môže byť 0). Preto počet vyjadríme ako: 9.10^4.

(c) Aby bolo slovo dĺžky 5 palindromom, musí vyzerať takto: XYZYX (kde X, Y aj Z sú nejaké znaky z abecedy, čiže napr. 98787, 12021, ale aj 55555). Čiže znak na začiatku bude aj na konci slova, druhý znak bude rovnaký ako štvrtý znak, a v strede môže byť hocičo. Z toho vyplýva, že potrebujeme iba tri znaky, štvrtý a piaty doplníme podľa prvých dvoch. Počet týchto slov preto bude rovný 10^3.

Prečo musíme rátať aj možnosti pre Z, keď to môže byť hocičo? Keby sme ich nerátali, tak pre slová ako napr. $12021, 12121, 12321...$ by sme zarátali iba jedno. Vidíme ale, že takýchto slov, ktoré začínajú 12 a končia 21 je 10.

Čo ak by sme chceli, aby tieto palindromy boli slová podľa (b)? Čo by sa zmenilo v našom výpočte? Jedine prvý (a teda aj posledný) znak by nemohol byť 0, čiže by sme mali 9 možností. Preto výsledok bude 9.10^2.

(d) Akým spôsobom vieme zapísať palindromy dĺžky 6? Ak použijeme rovnaký zápis ako v predošlom bode, tak budú vyzerať takto: XYZZYX. Vidíme, že opäť vyberáme tri znaky, a zvyšné znaky budú rovnaké. Preto je jasné, že počet palindromov dĺžky 6 bude rovnaký ako počet palindromov dĺžky 5.

3. príklad

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

(a) koľko slov nad Σ dĺžky 5 začína symbolom a?

(b) koľko slov nad Σ dĺžky 5 obsahuje práve 2 symboly a?

(c) koľko slov nad Σ dĺžky 5 neobsahuje žiadne a?

(d) koľko slov nad Σ dĺžky 5 obsahuje nepárny počet a?

Riešenie 3. príkladu

(a) Ak má slovo začínať symbolom a, potom nám zostávajú iba 4 miesta, ktoré potrebujeme obsadiť. Na každé z nich máme 4 možnosti na výber znaku, preto takýchto slov bude 4^4.

(b) Chceme práve dva symboly a. Ako prvé ich preto musíme umiestniť. Vybrať dve miesta z piatich, na ktoré dáme a sa dá $\binom{5}{2}$ spôsobmi. Na zvyšné tri miesta vyberáme symboly už iba z $\{b, c, d\}$. Máme preto 3^3 možností. Dokopy to je $\binom{5}{2}.3^3$.

(c) Ak slovo nemá obsahovať žiadne a, používame iba symboly $\{b, c, d\}$. Na každú z piatich pozícií máme tri možnosti a výsledok je tak 3^5.

(d) Aký počet áčok môže byť v slove dĺžky 5, aby bol nepárny? 5, 3 alebo 1. Rozoberme si to po možnostiach.

- Ak máme 1 a: najprv musíme vybrať, kam ho umiestnime. Máme 5 možností (keďže obsadzujeme 1 miesto z 5, vieme to zapísať aj ako $\binom{5}{1}$). Na zvyšné 4 pozície umiestnime nejaké zo zvyšných symbolov, čo nám dáva 3^4 možností.
- Ak máme 3 a: opäť najprv vyberieme, kam umiestnime áčka. Vyberáme tri pozície z piatich, čo je $\binom{5}{3}$. Zvyšné dve miesta obsadíme b-čkom, c-čkom alebo d-čkom, čiže 3^2.
- Ak máme 5 a: už nám nezostali žiadne voľné miesta, preto je takéto slovo iba jedno, konkrétne $aaaaa$. Vieme to zapísať tak, ako v predchádzajúcich bodoch? Samozrejme. Vyberáme 5 pozícií z 5 $\binom{5}{5}$ a na 0 pozícii máme možnosť dať tri znaky, čiže 3^0.

Teraz spočítame jednotlivé prípady: $\binom{5}{1}.3^4 + \binom{5}{3}.3^2 + \binom{5}{5}.3^0$. To vieme vyjadriť aj pomocou sumy:

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{5}{2i+1}.3^{5-(2i+1)}$$

Vieme pomocou takejto sumy zapísať aj slová dĺžky n s nepárnym počtom áčok? Čo sa bude meniť? No jednak musíme zmeniť 5 vo vnútri sumy (aj v kombinačnom čísle, aj v exponente) za n. Pokiaľ však pôjde i? Alebo sa môžeme spýtať inak, koľko nepárnych čísel je menších alebo rovných ako n? Ak je n párne, bude to presne polovica. Ak je n nepárne, bude to polovica plus 1, resp. polovica zaokrúhlená nahor, čo je horná celá časť čísla. Keďže ale naša suma ide od 0, musíme odčítať 1. Výsledok vyzerá takto:

$$\sum_{i=0}^{\lceil n \rceil - 1} \binom{n}{2i+1} .3^{n-(2i+1)}$$

Ako sa zmení suma, ak počet áčok bude párny? Zamyslite sa.

4. príklad

Máme slovo *abeceda*.

(a) Koľko má prefixov? Koľko z nich je vlastných?

   (i) Koľko prefixov má slovo dĺžky n?

(b) Koľko má sufixov? Koľko z nich je vlastných?

   (i) Koľko sufixov má slovo dĺžky n?

(c) Koľko má podslov? Koľko z nich je vlastných?

   (i) Aký je maximálny počet podslov v slove dĺžky n? Prečo hovoríme o maximálnom počte?

   (ii) Aký je minimálny počet podslov v slove dĺžky n? Nájdite príklad takého slova dĺžky 5.

Riešenie 4. príkladu

(a) Prefixy sú všetky tieto slová: $\lambda, a, ab, abe, abec, abece, abeced, abeceda$. Z nich vlastné sú všetky okrem λ a *abeceda*. Čiže také, ktoré keď zo slova vezmeme, tak zvyšok bude neprázdne slovo.

   (i) Pre slovo dĺžky n vieme počet prefixov vyjadriť ako $n + 1$. Máme n pozícií, po ktorú berieme prefix (od prvého po posledný znak), plus prázdne slovo.

(b) Sufixy sú všetky tieto slová: $\lambda, abeceda, beceda, eceda, ceda, eda, da, a$. Z nich vlastné sú všetky okrem λ a *abeceda*. Čiže opäť také, ktoré keď zo slova vezmeme, tak zvyšok bude neprázdne slovo.

(i) Ich počet je rovnaký ako počet prefixov. Pre slovo dĺžky n vieme počet sufixov vyjadriť ako $n + 1$. Máme n pozícií, od ktorej berieme sufix (od prvého po posledný znak), plus prázdne slovo.

(c) Aby sme zistili počet podslov slova dĺžky n, pozrime sa na podslová slova *abeceda* po jednotlivých dĺžkach.

- slová dĺžky 0: λ
- slová dĺžky 1: a, b, e, c, e, d, a. Tu vidíme, že sa niektoré zopakovali, čiže toto slovo nebude mať maximálny počet podslov.
- slová dĺžky 2: ab, be, ec, ce, ed, da
- slová dĺžky 3: abe, bec, ece, ced, eda
- slová dĺžky 4: $abec, bece, eced, ceda$
- slová dĺžky 5: $abece, beced, eceda$
- slová dĺžky 6: $abeced, beceda$
- slová dĺžky 7: $abeceda$

Vidíme, že sa ich počet vždy znižuje o jedna.

(i) Pre slová dĺžky n, tak vieme maximálny počet podslov vyjadriť ako

$$1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

.

Prečo hovoríme o maximálnom počte? Lebo už v našom príklade sa niektoré podslová opakujú (konkrétne a, e. Môžu byť slová, kde sa bude opakovať ešte viac podslov, napríklad $abababab = (ab)^4$. (Skúste zistiť, ktoré podslová sa v tomto slove zopakujú.)

Existujú slová, ktoré budú mať maximálny počet podslov. Napr. slovo *abec*,*auto*, či $abcdefghijklmnopqrstuvwxyz$.

(ii) Sú aj slová, ktoré majú málo podslov. Napr. slovo $aaaaa = a^5$, alebo slovo $xxxxx$. Tie budú mať 6 podslov ($\lambda, a, aa, aaa, aaaa$, $aaaaa$), v prípade slova dĺžky n to bude $n + 1$ podslov. Koľko bude vlastných podslov? O dve menej.

5. príklad

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

(a) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*$, $|w| \leq 6$, má prefix ab?

(b) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*$, $|w| \leq 6$, má sufix ab?

(c) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*$, $|w| \leq 6$, obsahuje podslovo ab?

(d) Koľko slov $w, w \in \Sigma^*$, $|w| \leq 6$, obsahuje podslovo aba?

Riešenie 5. príkladu

(a) Najkratšie také slovo je iba ab, čiže 1.

Pre slová dĺžky 3 sú také slová 4: ab a za ním ktorýkoľvek znak z abecedy.

Pre slová dĺžky 4 máme po ab dve voľné pozície, čiže slov bude 4^2.

Pre slová dĺžky 5 to bude 4^3. A takýchto slov dĺžky 5 bude 4^4.

Dokopy to je: $\sum_{i=0}^{4} 4^i$

(b) Počet slov so sufixom ab je rovnako veľa ako v (a), zamyslite sa, prečo je to tak.

(c) Slová, ktoré obsahujú podslovo ab si tiež rozoberme po jednotlivých dĺžkach.

- Slovo dĺžky 2 bude 1 (ab).
- Slov dĺžky 3 bude viac. Buď bude ab prefix, alebo bude sufix. Máme tak dve možnosti, kam ab umiestnime a na voľné miesto máme 4 možnosti na výber znaku. Čiže dokopy to je 2.4 možností.
- Pre slová dĺžky 4 musíme zistiť, koľko je možností na umiestnenie ab v slove – zostanú nám ešte dve prázdne miesta, čiže umiestňujeme ab na jedno miesto z troch. Na zvyšné dve miesta máme po 4 možnostiach, aký znak tam bude. To je $\binom{3}{1}.4^2$

  Čo sa ale môže stať? Slovo $abab$ mohlo vzniknúť dvakrát. Raz sme napevno dali ab na začiatok a zvyšné dva znaky sa vygenerovali takto, druhýkrát sme ab dali napevno nakoniec a prvé dva znaky sa vygenerovali. Preto od hodnoty vyššie musíme odčítať 1. Výsledok tak je $\binom{3}{1}.4^2 - 1$.
- Pre slová dĺžky 5 postupujeme rovnako. Teraz umiestňujeme ab na jednu zo štyroch možností, a na tri miesta ľubovoľné znaky. To nám dá: $\binom{4}{1}.4^3$.

Problémom zas bude, ak sa *ab* v slove vyskytne dvakrát. Zistime počet takýchto slov. Máme dve *ab* a ešte nám ostane jedna voľná pozícia. Umiestnime podslová na dve z troch pozícii a na zvyšnú dáme ľubovoľný znak z abecedy. Čiže takýchto slov je $\binom{3}{2}.4^1$.

Výsledný počet slov dĺžky 5 s podslovom *ab* je preto $\binom{4}{1}.4^3 - \binom{3}{2}.4^1$

- Pri slovách dĺžky 6 máme 5 pozícií, z toho 4 budú ľubovoľné znaky, preto: $\binom{5}{1}.4^4$.

  Problematické slová budú také, kde je dvakrát podslovo *ab*, čo znamená že máme 4 pozície, na dve dáme *ab* a na dve ľubovoľný znak z abecedy. Čo je $\binom{4}{2}.4^2$ slov.

  A ešte je jedno slovo, ktoré musíme brať do úvahy, a to slovo *ababab*, také je iba 1. Najprv sme ho trikrát vygenerovali (*ab* mohlo byť fixne na jednej z troch pozícií), potom sme ho trikrát odčítali (*ab* mohli byť fixne na dvoch z troch pozícií, čo sú tiež tri možnosti), preto ho musíme ešte pričítať.
  Výsledok je $\binom{5}{1}.4^4 - \binom{4}{2}.4^2 + 1$

(d) Aké problémy môžu nastať pri tomto slove? Zamyslite sa a vyriešte tento príklad samostatne.

6. príklad*

Máme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje najviac 2 a?

(b) Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje aspoň 3 b?

(c) Koľko slov z Σ^* dĺžky 10 obsahuje najviac 2 a a zároveň aspoň 3 b?