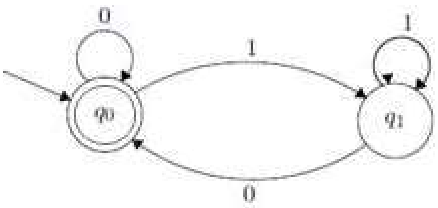
Dôkazy správnosti automatu

Príklad 1

Nech $L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w$ nekončí jednotkou$\}$. Navrhnite automat, ktorý rozpoznáva jazyk L a dokážte jeho správnosť.

Riešenie príkladu 1

Automat, ktorý rozpoznáva L, sme navrhli takto:



//$A = (\{q_0,q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$, kde δ: $\delta(q_0, 0) = q_0$;$\delta(q_0, 1) = q_1$; $\delta(q_1, 0) = q_0$; $\delta(q_1, 1) = q_1$

Dokážeme, že tento automat naozaj rozpoznáva všetky slová nad abecedou {0,1}, ktoré nekončia jednotkou.

Najskôr pre každý zo stavov q automatu určíme Kl[q], t.j. popíšeme množinu slov, po dočítaní ktorých končí automat v stave q.

$Kl[q_0] = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ w nekončí jednotkou$\}$
$Kl[q_1] = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ w končí jednotkou$\}$

} toto je predpoklad (T), ktorý sa budeme snažiť dokázať

Teraz matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku slova dokážeme naše predpoklady o jednotlivých Kl triedach, t.j. že platí tvrdenie (T).

1. **Báza**
   Simulujeme výpočet automatu na slovách dĺžky 0, prípadne 1, ... dovtedy, kým sa nedostaneme do všetkých stavov navrhnutého automatu:
   - **slová dĺžky 0, teda λ**
     $\delta\hat{}(q_0,\lambda) = q_0 \Rightarrow^{df.} \lambda \in Kl[q_0]$
     λ nekončí jednotkou, teda λ spĺňa predpoklad (T) o triede $Kl[q_0]$ ✓
   - **slová dĺžky 1**
     - **0**
       $\delta\hat{}(q_0,0) = q_0 \Rightarrow^{df.} 0 \in Kl[q_0]$
       0 nekončí jednotkou, teda 0 spĺňa predpoklad (T) o triede $Kl[q_0]$ ✓
     - **1**
       $\delta\hat{}(q_0,1) = q_1 \Rightarrow^{df.} 1 \in Kl[q_1]$;
       1 končí jednotkou, teda 1 spĺňa predpoklad (T) o triede $Kl[q_1]$ ✓
2. **Indukčný krok**
   Ind. predpoklad: Nech tvrdenie (T) platí pre všetky slová $w \in \Sigma^{n-1}$, (teda $|w| = n-1$).
   Ukážeme, že tvrdenie (T) platí aj pre slová wa, $|wa| = n$, $a \in \Sigma$.

   Slovo w patrí buď triede $Kl[q_0]$ alebo triede $Kl[q_1]$.
   - Ak $w \in Kl[q_0] \Rightarrow^{\text{podľa IP a df.}}$ w nekončí jednotkou $\wedge\ \delta\hat{}(q_0,w) = q_0$
     Pre $a \in \Sigma$ máme dva podprípady:
     - ak a = 0, skúmame slovo **w0**:
       $\delta\hat{}(q_0,w0) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),0) = \delta(q_0,0) = q_0 \quad \Rightarrow^{df.} w0 \in Kl[q_0]$
       w0 nekončí jednotkou $\Rightarrow$ spĺňa predpoklad (T) o triede $Kl[q_0]$ ✓

- ak a = 1, skúmame slovo **w1**:
  $\delta\hat{}(q_0,w1) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),1) = \delta(q_0,1) = q_1 \Rightarrow^{df.} w1 \in Kl[q_1]$
  w1 končí jednotkou ⇒ spĺňa predpoklad (T) o triede Kl[q_1] ✓

- Ak $w \in Kl[q_1] \Rightarrow^{\text{podľa IP a df.}}$ w končí jednotkou $\wedge\ \delta\hat{}(q_0,w) = q_1$
  Máme dva podprípady:
  - **w0**:
    $\delta\hat{}(q_0,w0) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),0) = \delta(q_1,0) = q_0 \Rightarrow^{df.} w0 \in Kl[q_0]$
    w0 nekončí jednotkou ⇒ spĺňa predpoklad (T) o triede Kl[q_0] ✓
  - **w1**:
    $\delta\hat{}(q_0,w1) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),1) = \delta(q_1,1) = q_1 \Rightarrow^{df.} w1 \in Kl[q_1]$
    w1 končí jednotkou ⇒ spĺňa predpoklad (T) o triede Kl[q_1] ✓

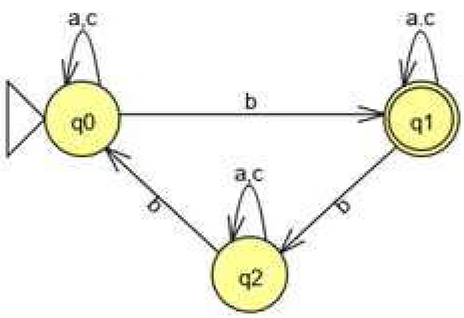
Dokázali sme, že náš predpoklad o triedach Kl[q_0] a Kl[q_1] platí. Akceptujúci stav automatu je q_0, ktorému zodpovedá trieda Kl[q_0]. Automat teda naozaj rozpoznáva slová nad abecedou {0, 1}, ktoré nekončia jednotkou.

Príklad 2

Navrhnite automat rozpoznávajúci jazyk **L = { w | w ∈ {a,b,c}* ∧ |w|$_b$ % 3 = 1 }** a dokážte jeho správnosť.

Riešenie príkladu 2

Automat sme navrhli takto:



Dôkaz správnosti:

Pre každý zo stavov q automatu určíme Kl[q].
Kl[q_0] = {w | w ∈ {a, b, c}* | |w|$_b$ % 3 = 0 }
Kl[q_1] = {w | w ∈ {a, b, c}* | |w|$_b$ % 3 = 1} (T)
Kl[q_2] = {w | w ∈{a, b, c}* | |w|$_b$ % 3 = 2}

L = Kl[q_1]

Matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku slova dokážeme, že platia predpoklady (T) o jednotlivých triedach.

1. **Báza**
   - slová dĺžky 0
     - **λ**
       δ^(q_0,**λ**) = q_0 ⇒ **λ** ∈Kl[q_0]
       λ má 0 b-čok, t.j. | **λ** |$_b$ % 3 = 0 ⇒ **λ** spĺňa predpoklad o triede Kl[q_0]
   - slová dĺžky 1
     - ***a, c***
       δ^(q_0,*a*) = δ^(q_0,*c*) = q_0 ⇒ *a, c* ∈ Kl[q_0]
       |*a*|$_b$ % 3 = |*c*|$_b$ % 3 = 0 % 3 = 0 ⇒ *a, c* spĺňajú predpoklad o triede Kl[q_0]
     - ***b***
       δ^(q_0,*b*) = q_1 ⇒ *b* ∈ Kl[q_1]
       |*b*|$_b$ % 3 = 1 % 3 = 1 ⇒ *b* spĺňa predpoklad o triede Kl[q_1]
   - slová dĺžky 2
     - ***aa, ac, ca, cc***
       δ^(q_0,*aa*) = δ^(q_0,*ac*) = δ^(q_0,*ca*) = δ^(q_0,*cc*)= q_0 ⇒ *aa, ac, ca, cc* ∈ Kl[q_0]
       |*aa*|$_b$ % 3 = |ac|$_b$ % 3 =|*ca*|$_b$ % 3 =|*cc*|$_b$ % 3 = 0 ⇒ *aa, ac, ca, cc* spĺňajú predpoklad o triede Kl[q_0]
     - ***ab, ba, bc, cb***
       δ^(q_0,*ab*) = δ^(q_0,*ba*) = δ^(q_0,*bc*) = δ^(q_0,*cb*) = q_1 ⇒ *ab, ba, bc, cb* ∈ Kl[q_1]

$|ab|_b \% 3 = |ba|_b \% 3 = |bc|_b \% 3 = |cb|_b \% 3 = 1 \Rightarrow$ *ab, ba, bc, cb* spĺňajú predpoklad o triede $Kl[q_1]$

- ***bb***
  $\delta\hat{}(q_0,bb) = q_2 \Rightarrow bb \in Kl[q_2]$
  $|bb|_b \% 3 = 2 \% 3 = 2 \Rightarrow b$ spĺňa predpoklad o triede $Kl[q_2]$

Indukčný krok

IP: Nech tvrdenie (T) platí pre všetky slová $w \in \Sigma^*$, $|w| = n-1$.
Ukážeme, že (T) platí aj pre slová wd, $|wd| = n$, $d \in \Sigma$.

Pre slovo w môžu nastať tri prípady:

- **w∈Kl[q₀]** $\Rightarrow^{\text{podľa df}} \delta\hat{}(q_0,w) = q_0$ a $^{\text{podľa IP}}$ $|w|_b \% 3 = 0$
  - ***wa, wc***
    pre $d \in \{a,c\}$: $\delta\hat{}(q_0,wd) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),d) = \delta(q_0,d) = \mathbf{q_0}$
    slová *wa* a *wc* majú rovnaký počet b-čok ako w, t.j.
    $|wa|_b \% 3 = |wc|_b \% 3 = |w|_b \% 3 = 0 \Rightarrow$ *wa*, *wc* spĺňajú predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_0}]$
  - ***wb***
    $\delta\hat{}(q_0,wb) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),b) = \delta(q_0,b) = \mathbf{q_1} \Rightarrow wb \in Kl[\mathbf{q_1}]$
    $|wb|_b = |w|_b + 1$ a keďže $|w|_b \% 3 = 0 \Rightarrow |wb|_b \% 3 = 1 \Rightarrow$ *wb* spĺňa predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_1}]$
- **w∈Kl[q₁]** $\Rightarrow \delta\hat{}(q_0,w) = q_1$ a $^{\text{podľa IP}}$ $|w|_b \% 3 = 1$
  - ***wa, wc***
    pre $d \in \{a,c\}$: $\delta\hat{}(q_0,wd) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),d) = \delta(q_1,d) = \mathbf{q_1}$
    $|wa|_b \% 3 = |wc|_b \% 3 = |w|_b \% 3 = 1 \Rightarrow$ *wa*, *wc* spĺňajú predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_1}]$
  - ***wb***
    $\delta\hat{}(q_0,wb) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),b) = \delta(q_1,b) = \mathbf{q_2} \Rightarrow wb \in Kl[\mathbf{q_2}]$
    $|wb|_b = |w|_b + 1$ a keďže $|w|_b \% 3 = 1 \Rightarrow |wb|_b \% 3 = 2 \Rightarrow$ *wb* spĺňa predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_2}]$
- **w∈Kl[q₂]** $\Rightarrow \delta\hat{}(q_0,w) = q_2$ a $^{\text{podľa IP}}$ $|w|_b \% 3 = 2$
  - ***wa, wc***
    pre $d \in \{a,c\}$: $\delta\hat{}(q_0,wd) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),d) = \delta(q_2,d) = \mathbf{q_0}$
    $|wa|_b \% 3 = |wc|_b \% 3 = |w|_b \% 3 = 2 \Rightarrow$ *wa*, *wc* spĺňajú predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_2}]$
  - ***wb***
    $\delta\hat{}(q_0,wb) = \delta(\delta\hat{}(q_0,w),b) = \delta(q_2,b) = \mathbf{q_0} \Rightarrow wb \in Kl[\mathbf{q_0}]$
    $|wb|_b = |w|_b + 1$ a keďže $|w|_b \% 3 = 2 \Rightarrow |wb|_b \% 3 = 0 \Rightarrow$ *wb* spĺňa predpoklad o triede $Kl[\mathbf{q_0}]$

Dokázali sme, že náš predpoklad o triedach $Kl[q_0]$, $Kl[q_1]$ a $Kl[q_2]$ platí. Akceptujúci stav automatu je q_1, ktorému zodpovedá trieda $Kl[q_1]$. Automat teda naozaj rozpoznáva slová nad abecedou {a,b,c}, v ktorých počet b po delení 3 dáva zvyšok 1.