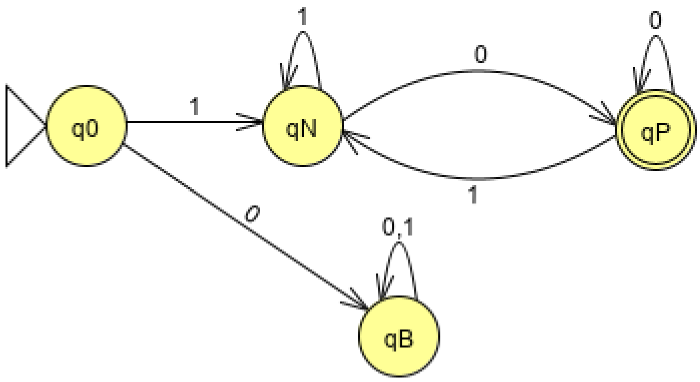
Dôkazy neexistencie (1)

Poznámka: text označený takto obsahuje otázky alebo úlohy, na ktoré by ste si mali najskôr odpovedať, resp. ich vyriešiť a až potom čítať ďalej.

Majme automat A z posledného cvičenia, ktorý rozpoznáva slová začínajúce symbolom 1, ktoré tvoria binárny zápis čísiel deliteľných dvoma.



V akom stave bude automat po dočítaní slov

- 1010001 ?
- 11 ?

Pridajme k obom týmto slovám symbol *0*. V akom stave bude automat po dočítaní slov

- 10100010 ?
- 110 ?

Pridajme k obom pôvodným slovám reťazec *01101*. V akom stave bude automat po dočítaní slov

- 101000101101 ?
- 1101101 ?

Pridajme k obom pôvodným slovám reťazec $0^{21}1$. V akom stave bude automat po dočítaní slov

- $10100010^{21}1$?
- $110^{21}1$?

Pridajme k obom pôvodným slovám reťazec *z*. V akom stave bude automat po dočítaní slov

- 1010001z ?
- 11z ?

Vedeli ste odpovedať na poslednú otázku? Od čoho závisí odpoveď?

Vieme povedať, či tie stavy budú pre slová xz a yz rôzne alebo rovnaké? Závisí to od slova z? Závisí to od slov x a y?

Čo vieme povedať o slovách *1010001z* aj *11z* **vzhľadom na jazyk L(A)**, ak stav, v ktorom automat skončí po ich dočítaní je:

- q_P?
- q_N ?

Skúsme to trochu zovšeobecniť.

Vychádzali sme **z dvoch rôznych slov *x* a *y***, po dočítaní ktorých automat skončil v tom istom stave, t.j. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = q_N$, resp. ešte inak povedané obe slová sú z triedy $KL[q_N]$. K obom týmto slovám sme priraďazili rovnaké slovo z a skúmali sme, do akého stavu sa automat dostane po prečítaní slov xz a yz. Zistili sme, že pre hocijaké z to bude **rovnaký stav**, t.j. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz) = r$, (slová xz, yz budú obe z $KL[r]$ triedy). Ak tento stav r:

- je **akceptujúci**, potom **obe slová xz aj yz patria jazyku $L(A)$**,
- nie je **akceptujúci**, potom **ani jedno zo slov xz aj yz nepatrí jazyku $L(A)$**,

čo môžeme zapísať aj takto $\boldsymbol{xz \in L(A) \Leftrightarrow yz \in L(A)}$ **.**

Lema 3.12:
Majme konečný automat $\boldsymbol{A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)}$ .Nech pre $x, y \in \Sigma^*, x \neq y$ platí, že $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = p$ pre nejaké $p \in Q$. Potom $\forall z \in \Sigma^*$ existuje $r \in Q$ také, že $xz \in KL[r] \wedge yz \in KL[r]$ a platí, že $xz \in L(A) \Leftrightarrow yz \in L(A)$.

Dôkaz:

Nech $\boldsymbol{A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)}$ je konečný automat.
Nech pre $x, y \in \Sigma^*, x \neq y$ platí, že $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = p$ pre nejaké $p \in Q$, t.j. $x, y \in KL[p]$.

Potom $\forall z \in \Sigma^*$: výpočet automatu A na slove xz je $(q_0, xz) \overset{*}{\vdash} (p, z) \overset{*}{\vdash} (r, \lambda)$ $\wedge$ výpočet automatu A na slove yz je $(q_0, yz) \overset{*}{\vdash} (p, z) \overset{*}{\vdash} (r, \lambda)$, čiže $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz) = r$.

Ak $r \in F \Rightarrow xz, yz \in L(A)$, ak $r \notin F \Rightarrow xz, yz \notin L(A)$.

Pripomeňte si:

- čo je konečný automat?
- kedy je jazyk regulárny?

Príklad

a) Navrhnite DKA, ktorý rozpoznáva jazyk $L_1 = \{01\}, \Sigma = \{0,1\}$.
b) Navrhnite DKA, ktorý rozpoznáva jazyk $L_2 = \{01, 0011\}, \Sigma = \{0,1\}$.
c) Navrhnite DKA, ktorý rozpoznáva jazyk $L_3 = \{01, 0011, 000111\}, \Sigma = \{0,1\}$.
d) Navrhnite DKA, ktorý rozpoznáva jazyk $L_4 = \{0^n 1^n \mid n \in N\}, \Sigma = \{0,1\}$.

- Podarilo sa Vám navrhnúť všetky automaty? Na aký problém ste narazili?
- Vieme skonštruovať automat pracujúci nad $\Sigma = \{0,1\}$, ktorý by rozpoznal, či najskôr čítame samé nuly a potom samé jednotky (nezáleží na ich počte)?
- Vieme pomocou automatu overiť, či tých núl a jednotiek je rovnaký počet?
- Koľko stavov by sme na to potrebovali?

Intuitívne vidíme, že na to, aby sme vedeli rozpoznať jazyk $L = \{0^n 1^n \mid n \in N\}$ by sme si potrebovali zapamätať, koľko núl sme na začiatku prečítali, aby sme neskôr vedeli „skontrolovať“, či bol jednotiek rovnaký počet. Pri KA si môžeme niečo pamätať jedine v stave. Môžeme mať stav, ktorý bude symbolizovať, že sme prečítali jednu nulu, iný stav, v ktorom si budeme pamätať, že sme už prečítali dve nuly, ... Keďže núl na začiatku môže byť neobmedzený počet, tak aj tých stavov by sme potrebovali neobmedzený počet. Môže mať DKA neobmedzený počet stavov?

Intuícia teda hovorí, že pre jazyk $L = \{0^n 1^n | \ n \in N\}$ nevieme skonštruovať automat, a teda tento jazyk **nie je regulárny**. Intuícia však nestačí, musíme to vedieť dokázať.

Tvrdíme, že $\boldsymbol{L_4 = \{0^n 1^n | n \in N\}, \Sigma = \{0, 1\}}$ nie je regulárny.

Dôkaz

Dokážeme to **sporom**, budeme predpokladať negáciu tvrdenia, t.j. že jazyk L je regulárny.

Ak L je regulárny, potom musí existovať konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, ktorý ho rozpoznáva, teda $L(A) = L_4$. Automat A má nejaký **konečný** počet stavov, nech $|Q| = m$.

Vezmime slová $0^1, 0^2, 0^3, \dots, 0^{m+1}$. Máme tu $m+1$ rôznych slov, čo je viac ako počet stavov automatu, preto medzi slovami$0^1, 0^2, 0^3, \dots, 0^{m+1}$ **musia existovať dve rôzne slová $\boldsymbol{x, y}$** po dočítaní ktorých skončí automat v rovnakom stave, t.j. $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)}$**. Potom, podľa Lémy 3.12 pre každé $\boldsymbol{z \in \Sigma^*}$ platí, že $\boldsymbol{xz \in L(A) \Leftrightarrow yz \in L(A)}$.**

Slová x a y sú rôzne slová tvaru 0^k, môžeme predpokladať, že $x = 0^i, y = 0^j$, kde $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m+1\}$.

Vezmime $z = 1^i$ Potom

- $xz = 0^i 1^i \in L_4$,
- $yz = 0^j 1^i \notin L_4$ (rôzny počet núl a jednotiek).

Podľa Lémy 3.12 by slová xz a yz buď obe mali alebo obe nemali patriť jazyku $L(A) = L_4$, vidíme ale, že slovo xz je z jazyka L_4, no slovo yz nie. Dopracovali sme sa k sporu. Preto platí pôvodné tvrdenie, že jazyk $\boldsymbol{L_4}$ **nie je regulárny.**

Použitá literatúra

Hromkovič Juraj: Teoretical Computer Science